

PRÁCTICA 4

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)^4 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 6} - -3}{\sqrt{4x + 4} - 4}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

2. Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, ¿es cierto que existe un entorno de 1 para el cual $f(x) < 3$?

¿Y que existe un entorno de 1 para el cual $f(x) < 2$? Justificar

3. ¿Tiene sentido buscar un $\delta > 0$ tal que:

a) $3x^2 - 5x + 1 > 0$ en $(1 - \delta, 1 + \delta)$?

b) $1 - x^2 > 0$ en $(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$?

Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

4. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones empleando la definición de límite.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{5} = \frac{4}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 - 6 = 12$

5. Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 + 3) - \log(x^2 + 2)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^x)}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/\operatorname{tg} x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$

6. Encontrar el límite, si existe. Si no lo hay, explicar por qué.

a) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{|x + 4|}{x + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{|x + 4|}{x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)^2}{|x - 1|}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{|x - 1|}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{|x|}$

7. Para cada una de las siguientes funciones

- ◇ estudiarla en cada punto de su dominio
- ◇ en los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla —si es posible— de modo que resulte continua

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & , |x| \leq 1 \\ |x-1| & , |x| > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & , x < 0 \\ -x^2 + \frac{5}{2}x & , x > 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x^2} & , x > 0 \\ x^2 + 1 & , x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(e^2x)}{x} & , x < 0 \\ (1+2x)^{1/x} & , 0 < x < 1 \\ \frac{x^2-1}{x^2-4x+3} + 5 & , x > 1 \end{cases}$$

8. a) Probar que existe $x \in (1, 2)$ tal que $x^3 - 3x + 1 = 0$.
- b) Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = x$.
- c) Encontrar un número r tal que $f(x) = x^9 - 100x^4 + 3x^3 + 12$ tenga al menos una raíz real en el intervalo $(-r, r)$.

APÉNDICE: DEFINICIONES Y RESULTADOS

Campo escalar

Llamaremos *campo escalar* a cualquier función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Límite — Continuidad

Límite

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in \bar{A}$ y $\ell \in \mathbb{R}$, decimos que el *límite de f cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{a}* es ℓ —y lo notamos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$ — cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \quad \implies \quad |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon$$

Proposición (Unicidad del límite)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $\mathbf{a} \in \bar{A}$. Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ y $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_2$, entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Proposición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in \bar{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell > \alpha$ (resp. $\ell < \alpha$), entonces $f(\mathbf{x}) > \alpha$ (resp. $f(\mathbf{x}) < \alpha$) para \mathbf{x} en un entorno de \mathbf{a} , $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \bar{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ y $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \ell_2$,

$$(i) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$$

$$(ii) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \ell_1 \ell_2$$

$$(iii) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (\text{si } \ell_2 \neq 0)$$

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$ tales que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$ y f es acotada en un entorno de $\mathbf{a} \in A$. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$$

Proposición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \overline{A}$ tales que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$. Sean $\varepsilon > 0$, $h : (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{y \rightarrow \ell} h(y) = L$ y $\mathbf{g} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow B(\mathbf{a}, r)$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{a}$. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h \circ f(\mathbf{x}) = L \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f \circ \mathbf{g}(t) = \ell$$

Proposición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \overline{A}$. Entonces, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(x) = \ell$ si y sólo si

$$f(x_n, y_n) \rightarrow \ell$$

para toda sucesión $((x_n, y_n)) \subset A$, $(x_n, y_n) \neq \mathbf{a}$, que converge a \mathbf{a} .

NOTA: lo mismo vale para $A \subset \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Corolario

Si $((x_n, y_n))$, $((u_n, v_n))$ son dos sucesiones que convergen al punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para las cuales

$$f(x_n, y_n) \rightarrow \ell_1 \quad \text{y} \quad f(u_n, v_n) \rightarrow \ell_2$$

con $\ell_1 \neq \ell_2$, entonces no existe el límite de f cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$.

NOTA: lo mismo vale en \mathbb{R}^m ($m \in \mathbb{N}$).

Proposición (límite de una composición)

Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathbf{a} \in \overline{A}$ tales que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$. Entonces,

(i) si la función h está definida en un entorno del número ℓ , toma valores en \mathbb{R} y satisface

$$\lim_{y \rightarrow \ell} h(y) = L, \text{ se tiene}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h \circ f(\mathbf{x}) = L$$

(ii) si la trayectoria \mathbf{g} está definida en un entorno del número t_0 y satisface $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{a}$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f \circ \mathbf{g}(t) = \ell$$

Corolario

Si $\mathbf{g}_1 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g}_2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfacen que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_1(t) = \mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_2(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \mathbf{g}_1(t) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \mathbf{g}_2(t)$$

entonces no existe $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$.

Continuidad

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es **continua** en $\mathbf{a} \in A$ si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Se dice que f es **continua** en A si es continua en cada uno de sus puntos.

Proposición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in A$. Entonces, f es continua en \mathbf{a} si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \quad \implies \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$$

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\mathbf{a} \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

- (i) $\alpha f + \beta g$ es continua en \mathbf{a}
- (ii) fg es continua en \mathbf{a}
- (iii) $\frac{f}{g}$ es continua en \mathbf{a} siempre que $g(\mathbf{a}) \neq 0$
- (iv) si $h : (f(\mathbf{a}) - \varepsilon, f(\mathbf{a}) + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(\mathbf{a})$, $h \circ f$ es continua en \mathbf{a} .

Teorema (Bolzano)

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo por arcos. Si f toma un valor positivo y otro negativo, entonces existe $\mathbf{a} \in A$ tal que $f(\mathbf{a}) = 0$.

Corolario

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo por arcos. Si $f(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in A$, entonces

$$f > 0 \quad \text{en } A \quad \text{o} \quad f < 0 \quad \text{en } A$$

Teorema (*de los valores intermedios*)

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo por arcos. Si $f(\mathbf{x}_1) = a$, $f(\mathbf{x}_2) = b$ y $a < c < b$, entonces existe $\mathbf{x}_0 \in A$ tal que $f(\mathbf{x}_0) = c$.

Teorema (*Weierstrass*)

Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces f resulta acotada y además existen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ tales que

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2)$$

para todo $\mathbf{x} \in K$; es decir, f alcanza un valor máximo absoluto $-f(\mathbf{x}_1)-$ y un valor mínimo absoluto $-f(\mathbf{x}_2)-$ en el conjunto K .