

PRÁCTICA 3

1. Dados los vectores $v = (1, 2)$ y $w = (3, -1)$ hallar gráfica y analíticamente los siguientes vectores:

$$v + w \quad -3v \quad 2(v - w) \quad 3v + 2w$$

2. Calcular el perímetro del triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ y $C = (4, -1)$

3. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:

a) $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 3\}$

b) $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leq 3\}$

c) $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \geq 5\}$

d) $\{v \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|v\| \leq 3\}$

4. En cada uno de los siguientes casos hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la condición pedida:

a) Si $v = (1, k, -1)$, que $\|v\| = 5$

b) Que sean ortogonales los vectores $(1, 1)$ y $(-5, 2k)$

5. Hallar el ángulo que forman los vectores u y v en cada uno de los siguientes casos:

a) $u = (-1, 0)$ $v = (-1, -1)$

b) $u = (3, 1)$ $v = (-1, 3)$

c) $u = (\sqrt{3}, 1)$ $v = (2\sqrt{3}, -2)$

6. Dibujar los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 y analizar gráficamente si son abiertos, cerrados, compactos.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 3, |y| < 4\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y < 0\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 0\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 7\}$

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 7\}$

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y > 1\}$

g) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \geq 2x + y \geq 1\}$

h) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0, y \neq 0\}$

APÉNDICE: DEFINICIONES Y RESULTADOS

Operaciones con vectores Suma Dados $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas (v_1, \dots, v_n) y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas (w_1, \dots, w_n) se define la suma como:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

La suma es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro ($\mathbf{0}=(0, \dots, 0)$) y todo elemento tiene inverso (el inverso de (v_1, \dots, v_n) es $(-v_1, \dots, -v_n)$).

Producto por un escalar Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define:

$$\alpha \mathbf{v} = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)$$

Propiedades

1. $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \mathbf{v} + \alpha \mathbf{w}$
2. $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$
3. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{v}$
4. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Norma de un vector

Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas (v_1, \dots, v_n) , llamamos *norma de v* al número

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

Propiedades

1. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
2. $\|a \cdot \mathbf{u}\| = |a| \|\mathbf{u}\| \quad (a \in \mathbb{R})$
3. $|u_i| \leq \|\mathbf{u}\| \leq |u_1| + \dots + |u_n| \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n$
4. $|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

Producto escalar

Dados $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en \mathbb{R}^3 , se define el *producto escalar entre u y v* como el número

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Propiedades

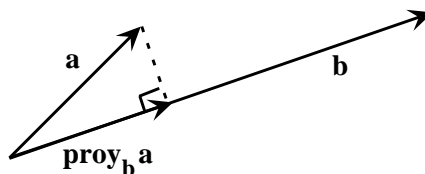
- ▷ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$ ($\alpha =$ ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v})
- ▷ $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ *Desigualdad de Schwarz*
- ▷ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales
- ▷ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

Proyección ortogonal

Sea \mathbf{b} un vector no nulo. La **proyección ortogonal del vector \mathbf{a} sobre \mathbf{b}** es el vector

$$\text{proy}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$$

el número $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}$ se llama **componente de \mathbf{a} en la dirección de \mathbf{b}** .



Conceptos topológicos

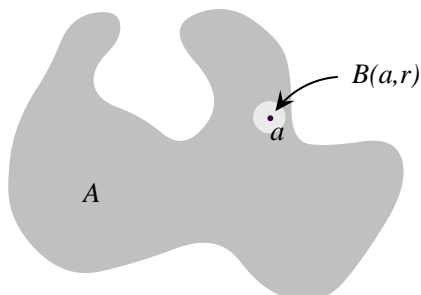
BOLA ABIERTA DE CENTRO A Y RADIO $r > 0$: $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$

BOLA CERRADA DE CENTRO A Y RADIO $r > 0$: $\bar{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$

CONJUNTO ACOTADO: si está contenido en $B(\mathbf{0}, r)$ para algún $r > 0$

ENTORNO DE $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$: es un conjunto E que contiene una bola abierta centrada en \mathbf{a}

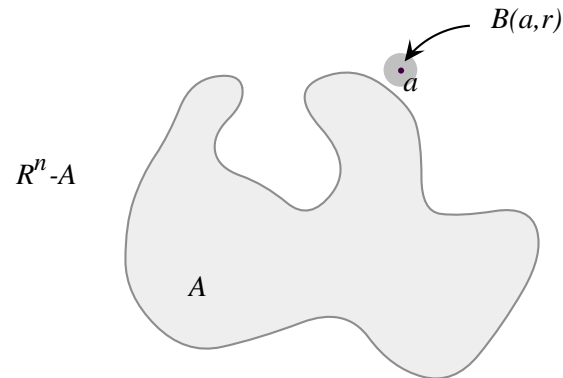
CONJUNTO ABIERTO: es un conjunto que es entorno de cada uno de sus puntos. Es decir, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si para cada $\mathbf{a} \in A$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset A$.



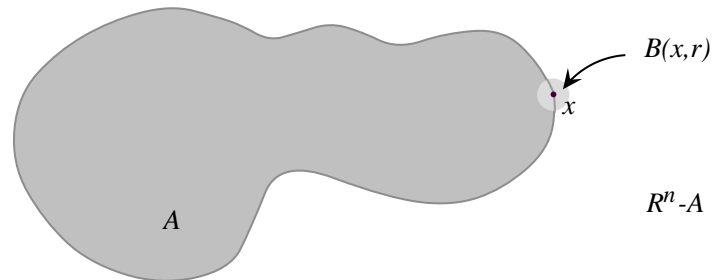
PUNTO INTERIOR: $\mathbf{a} \in A$ es un *punto interior* de A si existe un entorno de \mathbf{a} contenido en A .

INTERIOR DE UN CONJUNTO: $\overset{\circ}{A} = \{\mathbf{a} \in A \mid \mathbf{a} \text{ es un punto interior de } A\}$

CONJUNTO CERRADO: es un conjunto cuyo complemento es un conjunto abierto. Es decir, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es *cerrado* si para cada $\mathbf{a} \notin A$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \cap A = \emptyset$.



FRONTERA: $\partial A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset \text{ para todo } r > 0\}$



CONJUNTO COMPACTO: es un conjunto cerrado y acotado.