PRÁCTICA 10

1. Usando el criterio de Cauchy o el de D'Alembert, estudiar la convergencia de las series cuyo término general es

   a) $a_n = \dfrac{3^n}{n2^n}$
   b) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$
   c) $a_n = \dfrac{3n-2}{4^n}$
   d) $a_n = e^{-n}$
   e) $a_n = \dfrac{(2n+3)^n}{(3n-2)^n}$
   f) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$
   g) $a_n = \dfrac{(3n^2+1)4^n}{n!}$
   h) $a_n = \dfrac{(5^n+n^2)n!}{2^n n^n}$

2. Calcular la suma de las siguientes series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \quad , \quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{n-2}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} 5\frac{(-1)^n\, 3^{n-2}}{7^{8n+4}}$$

3. Usar el segundo criterio de comparación para analizar la convergencia de las series cuyo término general es

$$a_n = \frac{2n+4}{3n^2-1} \qquad a_n = \frac{2n^2 - \sqrt{n}}{3n^4+7} \qquad a_n = \frac{\ln n}{n^2}$$

4. Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, siendo

$$b_n = \frac{(-1)^n}{3n^2-1} \quad , \quad b_n = (-1)^n\frac{n+1}{n} \quad , \quad b_n = (-1)^n\frac{n^2-2n-1}{n!} \quad , \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

5. Estudiar la convergencia de las series de término general

a) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ b) $\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^n$ c) $\dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$ d) $\dfrac{2^n}{n5^n}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ f) $\dfrac{n^3}{e^n}$ g) $\dfrac{n!}{2^n+1}$ h) $\dfrac{2^n\, n!}{n^n}$

i) $\dfrac{e^n\, n!}{n^n}$ j) $\dfrac{(-e)^n\, n!}{n^n}$ k) $\dfrac{7^n}{(n+2)!+n!}$ l) $(-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$

6. Hallar el radio R de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, x^n$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\, x^n$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, x^n$
e) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^n+1}\, x^n$
f) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+5^n}{7^n+2}\, x^n$

En todos los casos estudiar la convergencia en $x = R$ y en $x = -R$

7. Hallar una representación en serie de potencias para las siguientes funciones y determinar el intervalo de convergencia:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
c) $f(x) = \dfrac{5}{1-3x^3}$

8. Hallar las siguientes sumas

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1}$ si $|x| < 1$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$ si $|x| < 1$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$

9. Hallar la serie de Mac Laurin de:

a) $f(x) = \ln(1+x)$
b) $f(x) = x \cos x$

10. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias

    a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

    b) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$

    c) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x-5}\, dx$

    d) $\int_0^{+\infty} xe^{x^2}\, dx$

    e) $\int_{-\infty}^0 xe^{x^2}\, dx$

    f) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$

    g) $\int_1^3 \frac{1}{x-2}\, dx$

Apéndice: Definiciones y Resultados

Suma parcial

Sea (a_n) una sucesión de números reales. A partir de (a_n) construimos una nueva sucesión cuyo término general –que llamaremos ***suma parcial***– está dado por

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

Serie

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Llamamos ***serie*** a la sucesión cuyo término general es la suma parcial de (a_n); es decir, con la notación de la definición anterior, (A_n) es la serie cuyo término general es a_n.

Convergencia — Suma de la serie

Cuando la serie (es decir, la sucesión de sumas parciales) converge, se llama ***suma de la serie*** a su límite. En símbolos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} A_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$$

Divergencia

Se dice que la serie de término general a_n ***diverge*** cuando no converge.

Propiedades

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Proposición

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, entonces $a_n \longrightarrow 0$.

Proposición *(Serie armónica – Serie armónica generalizada)*

Para cada $p \in \mathbb{R}$, se considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Esta serie

- converge si $p > 1$
- diverge si $p \leqslant 1$.

Criterios para series de términos positivos

Primer criterio de comparación

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ para todo $n \geqslant n_0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Segundo criterio de comparación

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales tales que $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ para todo $n \geqslant n_0$ y $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$, entonces

- si $\ell > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{converge}$$

- si $\ell = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{converge} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{diverge}$$

- si $\ell = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{diverge} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{converge}$$

Criterio de Cauchy

Sea (a_n) una sucesión de número positivos tales que $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$. Entonces,

(i) si $\ell < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

(ii) si $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Criterio de D'Alembert

Sea (a_n) una sucesión de número positivos tales que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$. Entonces,

(i) si $\ell < 1$, entonces entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

(ii) si $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Serie geométrica

Se denomina ***serie geométrica*** a aquella cuyo término general es $a_n = r^n$, para un cierto $r \in \mathbb{R}$.

Proposición

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si y sólo si $|r| < 1$ y el valor de su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Convergencia absoluta

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es ***absolutamente convergente*** o bien que ***converge absolutamente*** si converge la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Proposición

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Serie alternada

Dada una sucesión (a_n), se llama ***serie alternada*** a la que tiene por término general

$$(-1)^n a_n$$

Criterio de Leibniz

Sea (a_n) una sucesión tal que

- $a_n \geqslant 0$
- (a_n) es decreciente
- $a_n \longrightarrow 0$

Entonces, la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge.

Serie de potencias

Se llama ***serie de potencias centrada en a*** a la que tiene por término general

$$a_n(x-a)^n$$

Lema de Abel

Sea x_0 un número real distinto de cero tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ es convergente. Entonces, cualquiera sea r tal que $0 < r < |x_0|$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente en $[-r, r]$

Proposición

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias y sea $R = sup\{r \geqslant 0 y la serie converge en [-r, r]\}$, (eventualmente R puede ser $+\infty$), entonces se verifica:

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente $\forall x$ tal que $|x| < R$
- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no converge para ningún x tal que $|x| > R$

A dicho R se lo llama ***radio de convergencia***

Proposición

Sea $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias convergente R su radio de convergencia y $x \in (-R, R)$, entonces:

1. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge en $(-R, R)$
2. $S(x)$ es derivable en $(-R, R)$ y $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Proposición

Si f puede expresarse como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ para $|x - a| < R$, entonces:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Esta serie se llama ***serie de Taylor de la función f centrada en a***.