

## PRÁCTICA 7: SERIES DE FUNCIONES Y CONVERGENCIA UNIFORME

## Convergencia uniforme

**Ejercicio 1.** Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $A$  un conjunto. Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones  $A \rightarrow X$  y sea  $f : A \rightarrow X$ . Entonces  $(f_n)_{n \geq 1}$  no converge uniformemente a  $f$  sobre  $A$  si existen  $\alpha > 0$ , una subsucesión  $(f_{n_k})_{k \geq 1}$  de  $(f_n)_{n \geq 1}$  y una sucesión  $(a_k)_{k \geq 1}$  en  $A$  tales que  $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 2.**

- i) Encuentre el límite puntual de la sucesión  $(f_n)_{n \geq 1}$  de funciones reales definidas sobre  $A \subseteq \mathbb{R}$  en cada uno de los siguientes casos:
  - (a)  $f_n(x) = x^n$ ,  $A = (-1, 1]$ ;
  - (b)  $f_n(x) = x^{-n} e^x$ ,  $A = (1, +\infty)$ ;
  - (c)  $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ ,  $A = [0, 1]$ .
- ii) Para la sucesión de a), pruebe que la convergencia es uniforme sobre  $(0, \frac{1}{2})$ , y para la de b), que es uniforme sobre  $[2, 5]$ .
- iii) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión c) sobre  $A$ ?

**Ejercicio 3.** Analice la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones  $(f_n)_{n \geq 1}$ :

- i)  $f_n(x) = n^{-1} \sin nx$ , definida en  $\mathbb{R}$ ;
- ii)  $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ , definida en  $\mathbb{R}$ ;
- iii)  $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$ , definida en  $\mathbb{R}^2$  con valores en  $\mathbb{R}^2$ ;
- iv)  $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$ , definidas en  $[0, 1]$ ;
- v)  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0; \\ b + \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ y } (a, b) = 1; \end{cases}$  definidas en  $[0, 1]$ .
- vi)  $f_n(z) = z^n$ , definidas en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $X$  un conjunto y sea  $B(X)$  el conjunto de las funciones  $X \rightarrow \mathbb{C}$  que son acotadas. Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $B(X)$ .

- i) Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge puntualmente a una función  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , ¿es cierto que  $f \in B(X)$ ?
- ii) Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniforme a  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , entonces  $f \in B(X)$ .
- iii) La sucesión  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente a una función acotada  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  si  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge a  $f$  en  $(B(X), d_\infty)$ .

iv) Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente en  $X$ , entonces existe  $M > 0$  tal que  $|f_n(x)| \leq M$  para todo  $x \in X$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ . En otras palabras, la sucesión  $(f_n)_{n \geq 1}$  es *uniformemente acotada*.

**Ejercicio 5.** La sucesión de funciones  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

para cada  $x \in \mathbb{R}$ , converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

**Ejercicio 6.** Estudie la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones  $(f_n)_{n \geq 1}$  y  $(f'_n)_{n \geq 1}$  en  $[0, 1]$ , con  $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones  $X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continuas que converge uniformemente a una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Estudie la continuidad uniforme de  $f$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $X$  un espacio métrico y sean  $(f_n)_{n \geq 1}$  y  $(g_n)_{n \geq 1}$  dos sucesiones de funciones  $X \rightarrow \mathbb{R}$  que convergen uniformemente sobre  $X$  a  $f$  y a  $g$ , respectivamente.

- i) La sucesión  $(f_n + g_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente a  $f + g$  sobre  $X$ .
- ii) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces  $(f_n g_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente a  $fg$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto y sea  $A$  un conjunto. Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de funciones continuas  $X \rightarrow \mathbb{R}$  que converge uniformemente a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , y si  $(g_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función  $g : A \rightarrow X$ , entonces la sucesión  $(f_n \circ g_n)_{n \geq 1}$  de funciones  $A \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente a  $f \circ g$ .

**Ejercicio 10.** (*Teorema de Dini*) Sea  $X$  un espacio métrico compacto y sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones continuas  $X \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

- $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$  para todo  $x \in X$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ , y
- $(f_n)_{n \geq 1}$  converge puntualmente a una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que es continua.

Entonces  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente a  $f$  en  $X$ .

**Ejercicio 11.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto, sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones continuas  $X \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente a  $f$  sii para toda sucesión  $(x_n)_{n \geq 1}$  en  $X$  que converge la sucesión  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  converge en  $\mathbb{R}$  a  $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ .

---

## Equicontinuidad

---

**Ejercicio 12.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios métricos. Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones  $X \rightarrow Y$  es *equicontinua* en  $x_0 \in X$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F}, d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

- i) Cualquier familia finita de funciones  $X \rightarrow Y$  continuas en  $x_0 \in X$  es equicontinua en  $x_0$ .
- ii) Sea  $B(X, Y)$  el conjunto de todas las funciones  $X \rightarrow Y$  que son acotadas. Si  $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$  es una familia equicontinua, entonces  $\overline{\mathcal{F}}$  también es equicontinua.

Supongamos desde ahora que  $X$  es compacto.

- a) Si  $\mathcal{F}$  es una familia equicontinua de funciones  $X \rightarrow Y$ , entonces  $\mathcal{F}$  es uniformemente equicontinua.
- b) Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de funciones continuas  $X \rightarrow Y$  que converge uniformemente en  $X$ , entonces  $\{f_n : n \geq 1\}$  es una familia equicontinua.
- c) Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de funciones  $X \rightarrow Y$  uniformemente equicontinua que converge puntualmente a  $f : X \rightarrow Y$ , entonces esa convergencia es uniformemente en  $X$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables y uniformemente acotadas y para cada  $n \geq 1$  sea  $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(x) dx$$

para cada  $x \in [a, b]$ . Entonces la sucesión  $(F_n)_{n \geq 1}$  posee una subsucesión que converge uniformemente sobre  $[a, b]$ .

---

## Series de funciones

---

**Ejercicio 14.** Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones continuas  $X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformemente en  $X$ .

- i) La función suma  $f = \sum_{n \geq 1} f_n$  es continua en  $X$ .
- ii) Si  $X = [a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx$ .

**Ejercicio 15.** (*Criterio de Weierstrass*) Sea  $X$  un espacio métrico, sea  $(M_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de números reales y sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones  $X \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $|f_n(x)| \leq M_n$  para cada  $x \in X$  y cada  $n \geq 1$ . Si  $\sum_{n \geq 1} M_n$  converge, entonces  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absoluta y uniforme en  $X$ .

**Ejercicio 16.** (*Criterio de Dirichlet*) Sean  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números complejos tales que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente ( $a_{n+1} \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  y existe  $M > 0$  tal que  $|\sum_{n=1}^N b_n| \leq M$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Probar que, entonces, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  es convergente.

Notar que si tomamos  $b_n = (-1)^n$  tenemos el criterio de Leibniz.

**Ejercicio 17.** (*Función  $\zeta$  de Riemann*) Consideramos la función dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},$$

para  $s > 1$ . Probar que para cada  $\varepsilon > 0$   $\zeta$  converge uniformemente a una función continua sobre el intervalo  $(1 + \varepsilon, +\infty)$ . Más aún, en ese intervalo resulta derivable y es posible derivarla término a término.

**Ejercicio 18.** Si  $(a_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge absolutamente, entonces las dos series de funciones  $\sum_{n \geq 1} a_n \cos nx$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$  convergen absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 19.** Estudiar la convergencia (puntual, absoluta y uniforme) de las siguientes series, siendo  $x \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{C}$ :

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  ; b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ; c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$  ; d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  ; e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$

**Ejercicio 20.**

- i) Es  $\sin x = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y la serie converge absoluta y uniformemente en todo intervalo finito. ¿Qué sucede en  $\mathbb{R}$ ?
- ii) La función  $f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$  está bien definida en  $\mathbb{R}$  y es allí continua.

**Ejercicio 21.** Si  $x \in \mathbb{R}$ , sea  $f(x) = \sum_{n \geq 1} (1 + n^2 x^2)^{-1}$ .

- i) Determine el subconjunto de  $\mathbb{R}$  sobre el cual esta definición tiene sentido.
- ii) ¿Sobre qué intervalos es uniforme la convergencia?
- iii) ¿Sobre qué intervalos *no* es uniforme la convergencia?
- iv) ¿Es  $f$  continua en su dominio?
- v) ¿Es  $f$  acotada?