Práctica 4: Completitud, Continuidad uniforme y Baire

"Cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento, más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él hacia la libertad."
Hegel.

A. Completitud

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Probar que:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

iii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

iv) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

v) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 2. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

Ejercicio 4. *(Teorema de Cantor)* Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 6.

i) Sea X un conjunto y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada }\}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

ii) Sean X un espacio métrico y $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada y continua}\}$. Probar que $(C_b(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

iii) Probar que $C_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{x\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subseteq X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

B. Continuidad Uniforme

Ejercicio 8. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\, d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 9.

i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

   (a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$ y

   (b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

   entonces f no es uniformemente continua en A.

ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

iii) Verificar que la función $f(x) = (1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 10.

i) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

ii) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

   En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 11.

i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 12. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 13. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subseteq X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

C. Baire

Ejercicio 14. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 15. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 16. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Ejercicio 17. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0, 1] : f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 18. Sea (X, d) espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subseteq X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^\circ = \emptyset$.

1. Probar que si A es nunca denso, entonces $X \setminus A$ es denso. ¿Vale el recíproco?

2. Probar que si A es abierto y denso, entonces $X \setminus A$ es nunca denso.

Ejercicio 19. Sea (X, d) espacio métrico y $A \subseteq X$. Probar que son equivalentes:

1. A es nunca denso;
2. toda bola B abierta contiene otra $B_1 \subseteq B$ abierta tal que $B_1 \cap A = \emptyset$;
3. A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 20. Sea $Lip[a,b] = \{f \in C[a,b] : \exists k > 0,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\}$. Probar que $Lip[a,b]^\circ = \emptyset$ en $C[a,b]$.

Ejercicio 21. Probar que, si A es el conjunto de funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía, entonces A tiene interior vacío en $C[a,b]$.