Práctica 0: Números Reales

"Não se pode esperar aprender Matemática contemplativamente. Apelo, portanto, ao leitor para que tente resolver os exercícios que lhe pareçam mais atraentes e/ou desafiadores. [...] Procure ler o enunciado de cada um. E boa sorte na viagem que ora inicia."
Lages Lima.

Ejercicio 1. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$.

i) Verificar que $A_x \neq \emptyset$ y es acotado superiormente. Concluir que existe el máximo de A_x. Este número se llama la *parte entera de* x y se notará $[x]$.

ii) Demostrar que:

(a) $0 \leq x - [x] < 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
(b) $[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
(c) $[x] = \min\{k \in \mathbb{Z} : x < k + 1\}$.
(d) $[x + y] \leq [x] + [y] + 1$.
(e) $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$.

Ejercicio 2.

i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Mostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$.

ii) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

iii) Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r > s$. Mostrar que existe un número irracional entre r y s.

iv) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número irracional entre x e y.

Ejercicio 3. Sea $A = \left\{\frac{m}{2^n} : \ m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$.
Analizar la misma situación para el conjunto $B = \left\{\frac{m}{b^n} : m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$, donde $b \in (1, +\infty)$.

Ejercicio 4.

i) Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $q_n \geq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

ii) Enunciar y probar un enunciado análogo donde $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea estrictamente creciente.

Ejercicio 5. Sean $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\epsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - q_i)^2\right)^{1/2} < \epsilon$.

Ejercicio 6. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que:

a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0,\ a_n \leq b_n \leq c_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Ejercicio 7.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona. Probar que:

(a) Si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ. ¿Qué pasa si la subsucesión tiende a ∞?

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

ii) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.

iii) Encontrar una sucesión **no** convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$.

iv) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8. Recordemos que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ se dice de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $|a_n - a_m| < \epsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$.

i) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también lo hace la sucesión original.

ii) Probar que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Ejercicio 9. Hallar los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

i) $1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ \dots$

ii) $(-1)^n\Big(2 + \dfrac{3}{n}\Big)$.

iii) $\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big) \sin\Big(n\dfrac{\pi}{2}\Big)$.

iv) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por: $s_1 = 0$, $s_{2n} = \dfrac{s_{2n-1}}{2}$, $s_{2n+1} = \dfrac{1}{2} + s_{2n}$.

v) $\dfrac{n}{3} - \Big[\dfrac{n}{3}\Big]$.

Ejercicio 10.

i) Encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\liminf x_n = -3$, $\limsup x_n = 5$ y el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sea infinito.

ii) ¿Es cierto que

(a) si $\limsup x_n = 2$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 1{,}99$ para todo $n \geq n_0$?

(b) si $\limsup x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq b$ para todo $n \geq n_0$?

Ejercicio 11. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales acotada.

i) Probar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ se verifica:

(a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $a_n < \alpha + \epsilon$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \geq n$ tal que $a_m > \alpha - \epsilon$.

ii) Demostrar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

(a) Existe una subsucesión $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \alpha$;

(b) si $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} \leq \alpha$.

Ejercicio 12. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.

Ejercicio 13. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales acotadas. Probar que:

i) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

ii) $\limsup(a_n.b_n) \leq \limsup a_n . \limsup b_n$, si $a_n, b_n \geq 0$.

iii) Si $c > 0$ entonces, $\limsup(c.a_n) = c.\limsup a_n$.

Enunciar y probar resultados análogos para $\liminf$.

Ejercicio 14. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que: $\quad \liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

ii) Deducir que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

iii) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Ejercicio 15. Sean $0 \leq x, y < 1$, $x = x_1x_2\ldots$ e $y = y_1y_2\ldots$ sus desarrollos en base $b > 1$. Supongamos que el desarrollo de y es infinito, i.e., para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i > n$ con $y_i > 0$.

i) Probar que si $x_i = y_i$ para todo $i \leq n-1$ y $x_n < y_n$, entonces $x < y$.

ii) Deducir que el orden entre x e y es el mismo orden que el de los primeros términos en que difieren sus desarrollos.

iii) Manteniendo las hipótesis de i), sea $z \in [x, y]$. Probar que entonces z tiene un desarrollo en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leq n-1$.

Ejercicio 16. Hallar el desarrollo en base 2, 3 y 16 de los números 2.25; 10.7; 27 y 255.