1 Ejercicios surtidos

1. Sea X compacto y $f : X \to X$ continua. Probar:

   (a) Si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ entonces f tiene un único punto fijo.

   (b) Si $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ entonces f es un homeomorfismo.

   Sugerencia: dado $x \in X$ y escribiendo $f^n := f \circ \ldots \circ f$ (n veces), probar que la sucesión $\{f^n(x)\}$ tiene alguna subsucesión que converge a x.

2. Dados E, F normados, $A \subset E$ abierto y $f : A \to F$ de clase C^1, $x \in A$ se dice *punto regular* de f si $Df(x)$ es suryectiva y *punto crítico* en caso contrario. De la misma forma, $y \in F$ se dice *valor regular* si todas sus preimágenes son puntos regulares y *valor crtíco* en caso contrario. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 (es decir, f es la restricción de una función de clase C^1 definida en un entorno de $\overline{U}$). Probar que si y es un valor regular de f entonces $f^{-1}(y)$ es finito.

3. Una función $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se dice *casi-periódica* sii para toda sucesión de números $T_n \in \mathbb{R}$ la sucesión de funciones $f_n(t) := f(t + T_n)$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Probar que toda función periódica es casi-periódica.

   Para interesados en el tema, algunos ejercicios más:

   (a) Toda función casi-periódica es acotada.

   (b) Si f es casi-periódica y $f(t) \to 0$ para $t \to +\infty$ entonces $f \equiv 0$.

   (c) Si f_n es casi-periódica para todo n y $\{f_n\}$ converge uniformemente a cierta f, entonces f es casi-periódica. *Sugerencia*: usar un argumento diagonal.

(d) Si f es casi-periódica entonces existe L tal que f alcanza máximos y mínimos locales (no estrictos) en cualquier intervalo de longitud L. *Sugerencia*: probar primero que existe L tal que f alcanza algún extremo en todo intervalo de longitud L.

4. Sea E normado. Si $C \subset E$ es cerrado y $K \subset E$ es compacto, entonces $C + K := \{c + k : c \in C, k \in K\}$ es cerrado. ¿Vale el resultado si K es solamente cerrado?

5. Probar que el cubo de Hilbert

$$\mathcal{C} := \{y \in l^2 : 0 \leq y_n \leq 1/n \quad \text{para todo } n\}$$

es compacto.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to E$ continua, donde E es un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que f no es suryectiva.

7. Sea $I : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$I(u) = \int_0^1 f(t, u(t))\, dt$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1. Probar:

(a) I es de clase C^1.

(b) u es punto crítico de I si y solo si $\frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t)) = 0$ para todo t.

8. Sean $A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ el conjunto de matrices inversibles y $f : A \to \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $f(M) = M^{-1}$. Probar que f es diferenciable y calcular $Df(M)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $f(M) = M^k$. Probar que f es diferenciable. Si $MN = NM$, probar que $Df(M)N = nM^{n-1}N$.

10. Dada $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definimos $e^M := \sum_{n\geq 0} \frac{M^n}{n!}$.

(a) Probar que la función $M \mapsto e^M$ está bien definida y es diferenciable. Calcular la derivada en la dirección N para N que conmuta con M.

(b) Sea $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la curva definida por $X(t) = e^{tM} X_0$. Probar que $X'(t) = MX(t)$ y $X(0) = X_0$.

11. Generalizar los últimos ejercicios para $M \in L(E, E)$, donde E es un espacio de Banach.

12. Sea E un $\mathbb{R}$-e.v. y sea $C \subset E$ un cono, es decir, C es convexo y verifica:

$$C + C \subset C, \qquad C \cap -C = \{0\}.$$

Probar que la relación definida por $x \leq y$ sii $y - x \in C$ es un orden compatible con las operaciones de E. Recíprocamente, dado un orden compatible $\leq$, el conjunto de elementos no negativos $\{x \in E : x \geq 0\}$ es un cono. Dada una norma en E, probar que el orden inducido por un cono C es compatible con la topología si y solo si C es cerrado.

13. Sea E un espacio normado y $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^r$ con $r > 0$. Probar que f es diferenciable en 0 si y solo si $r > 1$.

2 Comentarios y problemas pendientes de la teórica

1. Sean E un espacio normado y $H \subset E$ un hiperplano cerrado. Entonces $E \backslash H$ tiene dos componentes conexas. En cambio, si H no es cerrado entonces $E \backslash H$ es conexo. *Sugerencia*: considerar $\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\ker(\varphi) = H$ y $H^+ = \{\varphi > 0\}$, $H^- = \{\varphi < 0\}$. Si H no es cerrado, entonces H^+ y H^- son densos.

2. Sean E, F normados, $A \subset E$ abierto y $f : A \to F$ diferenciable. Supongamos que $[x, y] \subset A$ y $\|Df(z)\| \leq M$ para todo $z \in [x, y]$. Entonces

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Sugerencia: fijar $\eta > 0$ y considerar la función $\varphi : [0, 1] \to A$ dada por $\varphi(t) := \|f(y + t(x - y)) - f(y)\| - t(M + \eta)\|x - y\|$. Probar que el conjunto de valores de t tales que $\varphi \leq 0$ en $[0, t]$ es cerrado y abierto.

Observación. Una demostración mucho más directa surge del 'comentario' que hicimos en clase: para todo $z \in F \backslash \{0\}$ existe $T \in L(F, \mathbb{R})$ de norma 1 tal que $Tz = \|z\|$. En efecto, alcanza con tomar $z = f(x) - f(y)$ y aplicar el teorema de valor medio a la función $T \circ f$. Comparar con el ejercicio 9-iii) de la práctica 9. El mismo 'comentario' (que en realidad es el teorema de Hahn-Banach) sirve para probar de manera sencilla que si f es dos veces diferenciable en cierto $a \in A$ entonces $D^2 f(a)$ es simétrica, es decir:

$$D^2 f(a)(v)(w) = D^2 f(a)(w)(v).$$

Para esto, es suficiente con estudiar la restricción de f al subespacio generado por v y w; en otras palabras, se puede suponer $E = \mathbb{R}^2$. Por otra parte, usando el 'comentario' y el hecho de que $D^2(T \circ f) = T \circ D^2 f$, se puede suponer que $F = \mathbb{R}$. Entonces la demostración sale considerando $\phi(x, y) := [f(x, y) - f(x, y_0)] - [f(x_0, y) - f(x_0, y_0)]$, donde $a = (x_0, y_0)$. Hay que acotar con cuidado; la cuenta se hace mucho más sencilla suponiendo (como se hace en Análisis I) que f es de clase C^2 en un entorno de a, aunque en realidad esta hipótesis no hace falta.

3. Obtener la expresión del polinomio de Taylor de orden k centrado en x_0 y fórmula del resto para una función $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1} donde A es un abierto de un espacio normado. *Sugerencia*: considerar el desarrollo de Taylor de $f \circ \varphi$, donde $\varphi(t) := x_0 + t(x - x_0)$.

4. Demostrar (usando el resultado sobre contracciones uniformes) el teorema de la función inversa y obtener el teorema de la función implícita como corolario.

5. Sean E un espacio de Banach, $A \subset E$ abierto y $F : A \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea $x_0 \in S := \{x \in A : F(x) = 0\}$ tal que $DF(x_0)$ es suryectiva. Un elemento $v \in E$ se dice tangente a S en x_0 sii existe una curva suave $c : (-\delta, \delta) \to S$ tal que $c(0) = x_0$ y $c'(0) = v$. El 'espacio tangente' $T_{x_0}S$ se define como el conjunto de todos los vectores tangentes a S en x_0. Probar que $T_{x_0}S = \ker(DF(x_0))$.

   Sugerencia: tomando $z \in E$ tal que $DF(x_0)z = 1$, se puede identificar $E = \ker(DF(x_0)) \oplus \langle z \rangle$ con $\ker(DF(x_0)) \times \mathbb{R}$. Escribir $x_0 = w_0 + s_0 z$ y aplicar el teorema de la función implícita para expresar los puntos de S cercanos a x_0 en la forma $w + s(w)z$, donde s es una función de clase C^1 definida en un entorno de w_0 tal que $s(w_0) = s_0$. Verificar que la curva $c(t) := w_0 + tv + s(w_0 + tv)z$ cumple lo pedido. ¿Cuál es la idea geométrica en esta construcción?

   Observación: en particular, si 0 es un valor regular de F se dice que S es una (hiper)superficie regular. Por ejemplo, la esfera $S_1 := \{x \in l^2 : \|x\| = 1\}$ es una hipersuperficie regular, ya que la función $F(x) = \|x\|^2 - 1$ es diferenciable. ¿Cuál es el espacio tangente a S_1 en x?

6. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y x_0 un extremo de f ligado a la condición $g = 0$. Si $Dg(x_0)$ es suryectiva, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Df(x_0) = \lambda Dg(x_0)$.

   Sugerencia: dado $v \in \ker(Dg(x_0))$, tomar una curva c como en el ejercicio anterior y deducir que $Df(x_0)v = 0$.

7. 'Equivalencia' entre el teorema de la función implícita y el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales:

   (a) Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $(x_0, y_0) \in A$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Deducir la existencia de una función implícita $y(x)$ del hecho de que el problema

   $$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}, \qquad y(x_0) = y_0$$

   tiene solución única definida en un intervalo abierto que contiene a x_0.

   (b) Sean $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Para cada $(t_0, x_0) \in A$ existe y de clase C^1 definida en un entorno de t_0 tal que $x'(t) = f(t, x(t))$ y $x(t_0) = x_0$. Por simplicidad, se puede suponer $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $t_0 = 0$. Definiendo $y(t) := x(\lambda t)$, el problema se transforma en $y'(t) = \lambda f(\lambda t, y(t))$, $y(0) = x_0$. Considerar la función $F : C([-1, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to C([-1, 1], \mathbb{R}^n)$ dada por $F(y, \lambda) = y - T(y, \lambda)$, donde

   $$T(y, \lambda)(t) := x_0 + \lambda \int_0^t f(\lambda s, y(s))\, ds.$$

   Entonces $F(x_0, 0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, 0) = I$. Esto dice que hay una curva y definida cerca de $\lambda = 0$ tal que $F(\lambda, y(\lambda)) = 0$.