

## PRÁCTICA 6: COMPACIDAD

## Compacidad

**Ejercicio 1.**

- i) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Probar que el conjunto  $\{0\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$  es compacto.
- ii) Mostrar que el intervalo  $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  no es compacto.
- iii) Sea  $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$  con  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Probar que  $S$  es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de  $(\mathbb{Q}, d)$ , donde  $d$  es la métrica euclídea de  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.** Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

**Ejercicio 3.** Sea  $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty : n \in \mathbb{N}\}$ , donde cada sucesión  $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Probar que  $A$  es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

**Ejercicio 4.** Dado un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_{i \in I}$  de un espacio métrico  $(X, d)$ , un número  $\epsilon > 0$  se llama **número de Lebesgue** de  $(U_i)_{i \in I}$  si para todo  $x \in X$  existe  $j \in I$  tal que  $B(x, \epsilon) \subseteq U_j$ . Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

**Ejercicio 5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Probar que:

- i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de  $X$  es compacta.
- ii) Si  $(X, d)$  es compacto, todo subconjunto cerrado de  $X$  es compacto.
- iii) Un subconjunto  $F \subseteq X$  es cerrado si y sólo si  $F \cap K$  es cerrado para todo compacto  $K \subseteq X$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que toda norma en  $E$  es equivalente a  $\|\cdot\|$ . Deducir que  $\overline{B}(x, r)$  es compacto cualquiera sean  $x \in E, r > 0$ .

*Sugerencia:* Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $E$ . Probar que la aplicación  $\|\cdot\|_1 : \sum_{i=1}^n x_i v_i \in E \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i| \in \mathbb{R}$  es una norma en  $E$  equivalente a  $\|\cdot\|$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ . Se define en  $c_0$  la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

- i) Demostrar que la bola cerrada  $\overline{B}(x, 1) = \{y \in C_0 : d(x, y) \leq 1\}$  no es compacta.
- ii) Probar que  $(c_0, d)$  es separable.

**Ejercicio 8.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Se considera  $(X \times Y, d_\infty)$ , donde

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que  $(X \times Y, d_\infty)$  es compacto si y sólo si  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  son compactos.

**Ejercicio 9.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

- i) Sean  $K \subseteq X$  un compacto y sea  $x \in X \setminus K$ . Probar que existe  $y \in K$  tal que  $d(x, K) = d(x, y)$ ; es decir, la distancia entre  $x$  y  $K$  se realiza.
- ii) Sean  $F, K \subseteq X$  dos subconjuntos disjuntos de  $X$  tales que  $F$  es cerrado y  $K$  es compacto. Probar que la distancia  $d(F, K)$  entre  $F$  y  $K$  es positiva.
- iii) Sean  $K_1, K_2 \subseteq X$  dos subconjuntos compactos de  $X$  tales que  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ . Probar que existen  $x_1 \in K_1$  y  $x_2 \in K_2$  tales que  $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$ ; es decir, la distancia entre  $K_1$  y  $K_2$  "se realiza".

**Ejercicio 10.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subseteq X : K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

- i) Sea  $\tilde{d}(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$ . Verificar que  $\tilde{d}$  no es una métrica en  $\mathcal{K}(X)$ .
- ii) Se define  $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\delta(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$ . Probar que para todo  $\epsilon > 0$  vale
 
$$\delta(A, B) < \epsilon \iff A \subseteq N(B, \epsilon) \text{ y } B \subseteq N(A, \epsilon),$$
 donde  $N(C, \epsilon) = \{x \in X : d(x, C) < \epsilon\}$  para cada  $C \subseteq X$ .
- iii) Probar que  $\delta$  es una métrica en  $\mathcal{K}(X)$ .

**Ejercicio 11.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$  continua. Probar que:

- i) Si  $(X, d)$  es compacto, entonces  $f(X)$  también lo es.
- ii) Si además  $f$  es biyectiva, entonces  $f$  resulta un homeomorfismo.

**Ejercicio 12.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico  $(Y, d')$ , la proyección  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  definida por  $\pi(x, y) = y$  es cerrada.

**Ejercicio 13.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Probar que si  $Y$  es compacto y el gráfico de  $f$  es cerrado en  $X \times Y$ , entonces  $f$  es continua.

**Ejercicio 14.**

- i) Sea  $f : \mathbb{R}_{\geq a} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es uniformemente continua en  $[a, b]$  y también en  $[b, +\infty)$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}_{\geq a}$ .
- ii) Deducir que  $\sqrt{x}$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .
- iii) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y tal que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $A \subseteq X$  compacto. Probar que si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $f(x) > 0$  para todo  $x \in A$ , entonces existe  $K > 0$  tal que  $f(x) \geq K$  para todo  $x \in A$ .

**Ejercicio 16.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y abierta.

- i) Probar que  $f$  no tiene extremos locales; es decir, no existen  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $\epsilon > 0$  tales que  $f(x_0) \leq f(x)$  (resp.  $f(x_0) \geq f(x)$ ) para todo  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ .
- ii) Comprobar que existen  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  tales que  $f(\mathbb{R}) = (a, b)$ .
- iii) Mostrar que  $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$  es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.