PRÁCTICA 6 - ESPACIOS L^p

Ejercicio 1. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$.

(a) Probar que si E tiene medida finita entonces $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$.

(b) Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede no valer si E tiene medida infinita.

(c) Probar que vale la recíproca de la afirmación en (a).

Ejercicio 2. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible de medida finita y $f : E \to \mathbb{C}$ medible.

(a) Probar que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(b) Mostrar que el límite del ítem anterior puede no valer si la medida de E es infinita.

Ejercicio 3. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible. Probar que para $1 \leq p, p' \leq +\infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ se tiene

$$\|f\|_p = \sup_{g\in\mathcal{D}_f(E)} \int_E f(x)g(x)dx$$

donde $\mathcal{D}_f(E) := \{g \in L^{p'}(E) : \|g\|_{p'} \leq 1 \text{ y } \int_E f(x)g(x)dx \text{ existe}\}$.

Ejercicio 4. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq r \leq p \leq s < +\infty$. Probar que para toda $f : E \to \mathbb{C}$ medible se tiene

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^r + \|f\|_s^s.$$

Ejercicio 5. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$ para algún $1 \leq p \leq +\infty$ entonces $f_n \overset{m}{\to} f$ sobre E.

(b) Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$, $g_n \to g$ en $L^{p'}(E)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces $f_n g_n \to fg$ en $L^1(E)$.

(c) Si $|E| < \infty$ y $f_n \to f$ en $L^\infty(E)$ entonces $f_n \to f$ en $L^p(E)$ para todo $1 \leq p \leq +\infty$.

Ejercicio 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$f_n = \begin{cases} e^n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Mostrar que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite en casi todo punto no converge en $L^p([0,1])$ para ningún $1 \leq p \leq +\infty$.

Ejercicio 7. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(E)$ con $1 \leq p < +\infty$. Probar que Sean y f en $L^p(E)$. Probar que

(a) Probar que si $f \in L^p(E)$ y $\|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0$ entonces $\|f_n\|_{L^p(E)} \to \|f\|_{L^p(E)}$.

(b) Si $f_n \to f$ en casi todo punto de E entonces

$$\|f_n\|_{L^p(E)} \to \|f\|_{L^p(E)} \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0.$$

Sugerencia. Verificar que la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$$

cae en las hipótesis del Lema de Fatou y aplicarlo.

Ejercicio 8. Sea $k : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ medible tal que existe $c > 0$ que verifica

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|dy \leq c \quad \text{y} \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|dx \leq c.$$

Probar que si $1 \leq p < +\infty$ entonces el operador $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy$$

está bien definido y es continuo.

Ejercicio 9. Para $1 \leq p < +\infty$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < |E| < +\infty$ definimos

$$N_p[f] = \left(\frac{1}{|E|}\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $p_1 < p_2 \;\Rightarrow\; N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$.

(b) $N_p[f+g] \leq N_p[f] + N_p[g]$.

(c) Si p' es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces $\dfrac{1}{|E|}\displaystyle\int_E |f(x)g(x)|dx \leq N_p[f]N_{p'}[g]$.

(d) $\lim\limits_{p\to+\infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 10. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < |E| < +\infty$ y $f \in L^\infty(E)$ con $\|f\|_\infty > 0$. Consideremos la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por

$$a_k = \int_E |f(x)|^k dx.$$

Demostrar que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 11. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ para $1 < p < +\infty$ tal que $f_n \to f$ en casi todo punto.

(a) Probar que si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$ entonces $f \in L^p$ y además vale

$$\int f_n(x)g(x)dx \to \int f(x)g(x)dx$$

para toda $g \in L^{p'}$ con p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(b) ¿Es cierto este resultado para $p = 1$?

Ejercicio 12. Probar que si $f_n \to f$ en L^p con $1 \leq p < +\infty$ y $g_n \to g$ puntualmente con $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_\infty < +\infty$ entonces $f_n g_n \to fg$ en L^p.

Ejercicio 13. (**Hölder generalizado**) Demostrar que si $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$ con $1 \leq p_i, r \leq +\infty$ entonces

$$\left\| \prod_{i=1}^{k} f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}.$$

Ejercicio 14.

(a) Mostrar que para $0 < p < 1$ los entornos del origen en L^p no son convexos.

(b) Concluir que L^p no puede ser un espacio normado si $0 < p < 1$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ medible tal que para todo $\alpha > 0$ se tiene

$$\omega(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| \leq c(1 + \alpha)^{-p}.$$

Probar que $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para $0 < r < p$.

Ejercicio 16. Sea p con $0 < p < +\infty$. Probar que $f \in L^p$ si y sólo si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp}\omega(2^k) < +\infty.$$

Probar, además, que existen constantes positivas c_1 y c_2 que no dependen de f tales que

$$c_1 \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp}\omega(2^k)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq c_2 \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kp}\omega(2^k)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Ejercicio 17. Sea $E = [0, \frac{1}{2}]$. Probar que

(a) $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}(\ln x^{-1})^{-\frac{2}{p}} \in L^p(E)$ para $1 \leq p < +\infty$ pero $f \notin L^r(E)$ si $r > p$.

(b) $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(E)$ para $1 \leq p < +\infty$ pero $g \notin L^\infty(E)$.

Ejercicio 18. Probar que $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ pero que $f \notin L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ para ningún p tal que $1 \leq p < +\infty$ y $p \neq 2$.

Ejercicio 19. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$, demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\displaystyle \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\|h\|\to+\infty}{\longrightarrow} 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p.$

(b) $\displaystyle \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 2\|f\|_p.$

Ejercicio 20.

(a) Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p, p' \leq +\infty$ tales que satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Probar que la convolución $f * g$ está bien definida y es una función uniformemente continua y acotada.

(b) Demostrar que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible tal que $0 < |E| < +\infty$ entonces

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

tiene interior no vacío.

Sugerencia: Considerar $\chi_E * \chi_{-E}$.

Ejercicio 21. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable, para cada $h > 0$ sea

$$f_h(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x)dx.$$

Probar que si $f \in L^p$ entonces valen las siguientes afirmaciones:

(a) $\|f_h\|_\infty \leq h^{-1/p}\|f\|_p$.

(b) $f_h \in L^p$ y $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.

(c) $\|f_h\|_r \leq h^{1/r-1/p}\|f\|_p$ para cada $1 \leq p \leq r$.

(d) $\|f_h - f\|_p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ para $1 \leq p < +\infty$.

Ejercicio 22. Sean $1 < p, p' < +\infty$ que satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Probar que si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión tal que para toda $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ vale que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$$

entonces $\|f\|_p \leq \liminf_{k\to+\infty}\|f_k\|_p$.

Ejercicio 23. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p < +\infty$. Definimos

$$L^p_*(E) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ medible} : \sup_{t>0}\left[t\,|\{x \in E : |f(x)| > t\}|^{\frac{1}{p}}\right] < +\infty\}.$$

(a) Probar que $L^p(E) \subseteq L^p_*(E)$.

(b) Mostrar que si E tiene medida finita y $1 < p < +\infty$ entonces $L^p_*(E) \subseteq L^1(E)$.

Ejercicio 24. Dados un intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y $f \in L^p([a,b])$ con $1 < p < +\infty$ se define $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Probar que existe una constante $K > 0$ tal que para toda partición de $[a,b]$ de la forma $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ resulta

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|F(x_{i+1}) - F(x_i)|^p}{(x_{i+1} - x_i)^{p-1}} \leq K.$$