

PRÁCTICA 5 - TEOREMAS DE FUBINI Y DE CAMBIO DE VARIABLES (EN \mathbb{R}^n)**Ejercicio 1.**

- (a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto medible tal que la sección $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$ la sección $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ también tiene medida nula.
- (b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y no negativa tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$ la función $y \mapsto f(x, y)$ es finita en casi todo punto. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$ la función $x \mapsto f(x, y)$ es finita en casi todo punto.

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles.

- (a) Probar que $s : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula $s(x, y) = f(x) + g(y)$ es medible.
- (b) Probar que $p : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula $h(x, y) = f(x)g(y)$ es medible.
- (c) Concluir del ítem anterior que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles entonces su producto cartesiano

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1, y \in E_2\}$$

es un subconjunto medible de \mathbb{R}^{n+m} y vale que $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

Ejercicio 3. Sean $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$. Probar que h es integrable si y sólo si f lo es.**Ejercicio 4.** Sea $E \subseteq [0, 1]^2$ tal que $|E_x| = |[0, 1] - E_y| = 0$ para todo $(x, y) \in [0, 1]^2$. Probar que E no es medible.**Ejercicio 5.** Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ función medible no negativa. Se define la *función de distribución* de f como la función $\omega : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dada por la fórmula

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

Mostrar las siguientes afirmaciones:

- (a) ω es monótona decreciente y continua a derecha.
- (b) $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0^-} \omega(\alpha) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha_0\}|$ para todo $\alpha_0 > 0$.
- (c) ω continua en $\alpha_0 \Rightarrow |\{x \in E : f(x) \geq \alpha_0\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha_0\}|$.
- (d) $\int_E f(x) dx = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$.

(e) Para todo $p > 0$ vale

$$\int_E (f(x))^p dx = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\omega(\alpha)d\alpha.$$

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que existe $\alpha \in (0, 1)$ que satisface

$$|f(t)| \leq t^\alpha/(1+t)$$

para todo $t \geq 0$. Sea $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$G(x, t) = e^{-xt}f(t).$$

Probar que G es medible e integrable.

Ejercicio 7. Sea $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por la fórmula $k(x, y) = xy$.

- (a) Probar $k^{-1}(E)$ es medible para todo $E \subseteq \mathbb{R}$ medible.
- (b) Deducir que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible entonces $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la fórmula $h(x, y) = f(xy)$ también es medible.

Ejercicio 8. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ medibles y $h : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como $h(x) = |(A - x) \cap B|$. Probar que h es medible y satisface $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = |A||B|$.

Ejercicio 9. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Se define la *transformada de Fourier de f* como la función $T_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$T_f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx.$$

- (a) Probar que la transformada se encuentra bien definida, i.e. la función $e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)$ es medible e integrable para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo.
- (b) Demostrar las siguientes afirmaciones:
 - (i) T_f es acotada y uniformemente continua.
 - (ii) **Lema de Riemann-Lebesgue.** $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} T_f(\xi) = 0$.
 - (iii) Si $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ con cada $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable entonces $T_f(\xi) = \prod_{i=1}^n T_{f_i}(\xi_i)$.
 - (iv) Si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces $T_{f * g} = T_f T_g$.

Ejercicio 11. Sean $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrable tal que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{R} - [a, b]$. Dado $h > 0$ se define $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por la fórmula

$$g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

Probar que g es medible y satisface

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Ejercicio 12. Sea F un subconjunto cerrado de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y denotemos por $d(\cdot, F)$ a la función de distancia a F correspondiente. Dado $\lambda > 0$ definimos $M_\lambda : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por la fórmula

$$M_\lambda(x) := \int_a^b \frac{d(y, F)^\lambda}{|x - y|^{1+\lambda}} dy.$$

- (a) Probar que M_λ es medible.
- (b) Probar que $M_\lambda(x) = +\infty$ para todo $x \in [a, b] - F$.
- (c) Probar que M_λ es integrable sobre F y satisface la estimación

$$\int_F M_\lambda(x) dx \leq \frac{2}{\lambda} |[a, b] - F|.$$

Deducir que M_λ es finita en casi todo punto de F .

Ejercicio 13. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Sugerencia. Observar que para todo $x > 0$ vale la identidad $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$.

Ejercicio 14.

- (a) Probar que para toda función medible $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ no negativa se satisface

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{(0, +\infty) \times (0, 2\pi)} f(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) r d(r, \theta).$$

- (b) Probar que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Ejercicio 15. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica y sea $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = x^t A x.$$

- (a) Probar que la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula $f(x) = e^{-Q(x)}$ es integrable si y sólo si todos los autovalores de A son positivos.

(b) Probar que en tal caso se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Ejercicio 16. Una función medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice una *radial* si existe $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $f(x) = g(\|x\|)$. Probar que existe una constante $C_n > 0$ tal que para toda función radial f se satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = C_n \int_0^{+\infty} r^{n-1} g(r) dr.$$

Ejercicio 17. ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ es $\|x\|^p$ integrable sobre la bola unitaria de \mathbb{R}^n ?

Ejercicio 18. Para cada $n \in \mathbb{N}$ calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx.$$

Ejercicio 19. Demostrar que la integral biparamétrica

$$\int_0^1 x^{p-1} |\log x|^{q-1} dx$$

es finita si $p > 0$ y $q > 0$. Expresar el valor de dicha integral en términos de la función Γ . *Sugerencia.* Considere el cambio de variables $x = e^{-t}$.