Práctica 4 - Integral de Lebesgue

En los siguientes ejercicios utilizaremos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$:

Ejercicio 1. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.

(a) Probar que si f es no negativa entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Concluir que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\int_{E} f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx.$$

(b) Probar que si f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ entonces valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.

(a) Probar que si f es no negativa entonces para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)dx = \frac{1}{|a|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Concluir que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible entonces para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ vale

$$\int_{E} f(ax)dx = \frac{1}{|a|^n}\int_{aE} f(x)dx.$$

(b) Probar que si f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ entonces valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 3. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que $\int_A f(x)dx = 0$ para todo $A \subseteq E$ medible. Probar que $f = 0$ en casi todo punto de E.

Ejercicio 4. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que

$$\left|\int_E f(x)dx\right| = \int_E |f(x)|dx.$$

Mostrar que f tiene signo constante en casi todo punto de E.

Ejercicio 5. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y f integrable sobre E.

(a) Probar que si $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|dx = 0$ entonces $f_n \xrightarrow{m} f$ sobre E.

(b) ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 6.

(a) Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que existe g continua e integrable sobre $\mathbb{R}_{>0}$ tal que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ que verifica

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} |g(x_n)| = +\infty.$$

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\geq k\}} |f(x)|dx = 0.$$

Ejercicio 8.

(a) Sea $(E_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ una familia de conjuntos medibles contenidos en el intervalo $[0,1]$. Probar que si para cada $x \in [0,1]$ el conjunto $A_x = \{k \in \{1,\ldots,n\} : x \in E_k\}$ tiene por lo menos q elementos entonces existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $|E_k| \geq \frac{q}{n}$.

(b) Sean $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles de $\mathbb{R}^m$ y un número natural k. Probar que si definimos

$$G = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in E_n \text{ para al menos } k \text{ valores de } n\}$$

entonces G es medible y $|G| \leq \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$.

Ejercicio 9.

(a) Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

(b) Mostrar que en el Lema de Fatou la hipótesis de que las funciones en la sucesión sean no negativas es necesaria.

Ejercicio 10. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables definidas sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ que converge en casi todo punto de E a una cierta función f.

(a) Probar que si $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_E |f_k(x)|dx < +\infty$ entonces f es integrable.

(b) Probar que si $0 \leq f_k \leq f$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

Ejercicio 11.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de funciones medibles no negativas definidas sobre E. Mostrar que si f_1 es integrable entonces

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k < +\infty.$$

(b) Para cada $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x.$$

Sugerencia. Considerar la función $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$ definida sobre $(1, x)$.

Ejercicio 12. Probar que si $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0.$$

Ejercicio 13.

(a) Probar el Teorema de Convergencia Mayorada utilizando el Teorema de Egorov.

(b) Mostrar que el Teorema de Convergencia Mayorada es también válido para funciones a valores complejos.

Ejercicio 14. Probar que si $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x)dx = 0.$$

Ejercicio 15. Sean $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles sobre $\mathbb{R}^n$ que converge en casi todo punto a una cierta función f y tal que existe g integrable que verifica $|f_k| \leq g$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si para $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ definimos $E_j = \bigcup_{k\geq j}\{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ entonces $\lim_{j\to+\infty} |E_j| = 0$.

(b) Deducir que f_n converge en medida a f.

Ejercicio 16. Sean $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $g(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ y $f = g'$. Probar que f es continua en $(0,1)$, existe el límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx$$

pero $f \notin L^1(0,1)$ (esto es: f no es integrable en $(0,1)$).

Los siguientes ejercicios utilizan la integral de Lebesgue con respecto a medidas más generales:

Ejercicio 17. Sea $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa (un peso). Definimos la medida pesada asociada por:

$$\mu_w(E) = \int_E w(x)\, dx \quad \text{para } E \subset \mathbb{R}^d \text{ medible (Lebesgue)}$$

Probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu_w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) w(x)\, dx$$

(usualmente se escribe $\mu_w = w(x)dx$) para toda función medible $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ no negativa, o integrable respecto a μ_ν.

Ejercicio 18. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y $T : X \to Y$. Definimos $\nu = T\#\mu$ como en la práctica 2. Probar que

$$\int_X f(T(x))\, d\mu(x) = \int_Y f(y)\, d\nu$$

para toda función $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ ν-medible, no negativa o integrable respecto a ν.