# Práctica 1 - Medida de Lebesgue

**Ejercicio 1.** Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $d(A, B) > 0$. Probar que $|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e$.

**Ejercicio 2.** Sea $E = \{x \in (0, 1) :$ en el desarrollo decimal de $x$ no aparece el dígito $7\}$. Probar que $E$ tiene medida nula.

**Ejercicio 3.**

(a) Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable. Probar que el gráfico de $f$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de medida nula.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida nula.

(c) ¿Y si $f$ tiene finitas discontinuidades?

**Ejercicio 4.** Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Probar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

**Ejercicio 5.** Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ probar que existe $H \supseteq A$ de tipo $G_\delta$ tal que $|A|_e = |H|$.

**Ejercicio 6.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $E = A \cup B$ con $|B| = 0$. Probar que $A$ es medible.

**Ejercicio 7.** Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por la fórmula $T(x) = x + v$. Probar que

(a) $|T(E)|_e = |E|_e$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Si $E$ es medible entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

**Ejercicio 8.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Definimos $rA = \{r.a : a \in A\}$. Probar que

(a) $|rA|_e = r^n|A|_e$.

(b) Si $A$ es medible entonces $rA$ es medible y $|rA| = r^n|A|$.

**Ejercicio 9.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que existe $A$ de medida nula con $E \subseteq A$.

(a) Probar que $E$ tiene medida nula.

(b) Deducir que el cardinal de los medibles es $2^c$. ¿Cual es el cardinal de los no medibles? (En la teórica se demostrará que cualquier intervalo contiene conjuntos no medibles)

**Ejercicio 10.** Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $I'$ a los intervalos con ejes paralelos al nuevo sistema de coordenadas y por $|E|'_e$ a la medida exterior de un conjunto $E$ relativa a dicho sistema de coordenadas.

(a) Probar que $|E|'_e = |E|_e$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Deducir que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es invariante por rotaciones y simetrías.

**Ejercicio 11.** Sea $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

(a) Calcular $|B(0,r)|$ en términos de $|B(0,1)|$.

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Probar que la función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$f(r) = |A \cap B(0,r)|$$

es continua.

(c) Demostrar que si $A$ es medible entonces para cada $s : 0 \leq s \leq |A|$ existe $B \subseteq A$ medible tal que $|B| = s$.

(d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < |A| < +\infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$ existen $n$ subconjuntos disjuntos de $A$, $(A_j)_{1\leq j\leq n}$, tales que $|A_j| = |A|/n$, para cada $1 \leq j \leq n$.

**Ejercicio 12.** Sea $T : [0,1) \to [0,1)$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x-1 & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Probar que si $E \subseteq [0,1)$ es medible entonces $T^{-1}(E)$ es medible y $|T^{-1}(E)| = |E|$.

**Ejercicio 13.** Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ son medibles.

(b) $|\liminf\limits_{n\to\infty} A_n| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} |A_n|$.

(c) Si para algún $n \in \mathbb{N}$ vale que $|\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k| < +\infty$ entonces $|\limsup\limits_{n\to\infty} A_n| \geq \limsup\limits_{n\to\infty} |A_n|$.

(d) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$, entonces $|\limsup\limits_{n\to\infty} A_n| = 0$.

**Ejercicio 14.** Construir un subconjunto $C_\delta$ de $[0,1]$ siguiendo la construcción del conjunto de Cantor excepto que en el $k$-ésimo paso cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}$ para cierto $0 < \delta < 1$.

(a) Probar que $C_\delta$ es perfecto, tiene medida $1-\delta$ y no contiene intervalos.

(b) Construir un abierto de $\mathbb{R}$ con frontera de medida positiva.

**Ejercicio 15.** Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(a) $E$ es medible.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E \backslash F|_e < \varepsilon$.

(c) Existen $H$ de clase $F_\sigma$ y $N$ de medida nula tales que $E = H \cup N$.

**Ejercicio 16.** Decimos que el conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Carathéodory* si para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se verifica

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A \cap E^c|_e.$$

Probar que

(a) Todo conjunto medible satisface la condición de Carathéodory.

(b) Si $E$ es acotado y satisface la condición de Carathéodory entonces $E$ es medible.

(c) $E$ es medible si y sólo si satisface la condición de Carathéodory.

**Ejercicio 17.**

(a) Probar que si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|_e = \lim_{k\to\infty} |E_k|_e.$$

(b) Dar un ejemplo de una sucesión decreciente $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que $|E_k|_e < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\left|\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right|_e < \lim_{k\to\infty} |E_k|_e.$$

**Ejercicio 18.** Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos su medida interior por la fórmula

$$|E|_i = \sup\{|F| : F \subseteq E\,,\ F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que

(a) $|E|_i \leq |E|_e$.

(b) Si $E$ es medible entonces $|E|_i = |E|_e$.

(c) Si $|E|_e < +\infty$ y $|E|_i = |E|_e$ entonces $E$ es medible.

(d) Existe $E$ no medible tal que $|E|_i = |E|_e$.

(e) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$.

(f) Si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son disjuntos entonces $\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|_i \geq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$.

**Ejercicio 19.** Sea $V$ un conjunto de Vitali. Probar que si $E \subseteq V$ es medible entonces $|E| = 0$. Concluir que $|V|_i = 0$.

**Ejercicio 20.**

(a) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjuntos tales que $\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|_e < \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e$.

(b) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|_i > \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$.

(c) Construir $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|E|_i < +\infty$ y $|E|_e = +\infty$.

**Ejercicio 21.** Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $A \subseteq E$. Probar que

$$|E| = |A|_i + |E\backslash A|_e.$$

**Ejercicio 22.** Mostrar que existe $H \subseteq [0,1]$ de clase $F_\sigma$ con $|H| = 1$ formado únicamente por puntos irracionales.

**Ejercicio 23.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida positiva.

(a) Mostrar que para todo $\alpha > 1$ existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|I| < \alpha|E \cap I|$.

(b) Probar que existe $r_0 > 0$ tal que $E \cap (E + v) \neq \emptyset$ para todo $v \in B(0, r_0)$.

(c) Concluir que el conjunto de las diferencias de $E$ definido como

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un entorno del origen.

**Ejercicio 24.** Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene cardinal $c$.
*Sugerencia.* Recordar que si $\alpha$ es un cardinal infinito entonces $\alpha^2 = \alpha$.

**Ejercicio 25.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que para todo par de puntos $x, y \in E$ se satisface

$$x \neq y \Longrightarrow \frac{x+y}{2} \notin E.$$

Probar que $E$ tiene medida nula.
*Sugerencia.* Mostrar que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que para todo intervalo $I$ se tiene $|E \cap I| \leq \alpha|I|$.