Práctica 0 - Preliminares: Conjuntos y Funciones

Ejercicio 1. Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{j\in J}$ dos familias de conjuntos. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$

(b) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cap Y_j)$

(c) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$

(d) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$

(e) Si $I = J$ y para todo $i \in I$ se tiene $Y_i \subseteq X_i$ entonces

$$\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \text{ y } \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)$$

(f) Si $A \subseteq I$ entonces

$$\left(\bigcup_{i\in A} X_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \text{ y } \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \left(\bigcap_{i\in A} X_i\right)$$

(g) Para cada conjunto F se tiene

$$F - \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(F - X_i) \text{ y } F - \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(F - X_i)$$

Ejercicio 2.

(a) Sea $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos indexada en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Probar que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}.$$

(b) Encontrar una familia de conjuntos $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k} \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}.$$

Ejercicio 3. Sean $(J_l)_{l\in L}$ y $(X_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos que satisfacen $\bigcup_{l\in L} J_l = I$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{l\in L}\left(\bigcup_{i\in J_l} X_i\right)$

(b) $\displaystyle\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{l\in L}\left(\bigcap_{i\in J_l} X_i\right)$

Ejercicio 4. Probar que si A y B son conjuntos tales que $A\times B = (A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$ con $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=\emptyset$, $A_1\times B_1\neq\emptyset$ y $A_2\times B_2\neq\emptyset$ entonces vale que

$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1\cup B_2) \text{ ó } (A = A_1\cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B)$$

Ejercicio 5. Sea $f : E\to F$ una función y consideremos dos pares de subconjuntos $A, B\subseteq E$ y $C, D\subseteq F$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $A\subseteq B \Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$

(b) $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$

(c) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

(d) Si f es inyectiva entonces $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$

(e) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(D))\subseteq D$

(f) Si f es inyectiva entonces $f(E-A)\subseteq F-f(A)$

(g) Si f es suryectiva entonces $f(E-A)\supseteq F-f(A)$

(h) $f^{-1}(F-D) = E-f^{-1}(D)$

Ejercicio 6. Sea $f : E\to F$ una función y consideremos dos familias $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_j)_{j\in J}$ de subconjuntos de E y F, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $f(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$

(b) $f(\bigcap_{i\in I} X_i)\subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$

(c) Si f es inyectiva entonces $f(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} f(X_i)$

(d) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} Y_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$

(e) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Y_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$

Ejercicio 7. Dada una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de E definimos el *límite inferior* y el *límite superior* de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to\infty} E_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k$$

$$\limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k$$

Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $E - \liminf\limits_{n\to\infty} E_n = \limsup\limits_{n\to\infty} (E - E_n)$

(b) $E - \limsup\limits_{n\to\infty} E_n = \liminf\limits_{n\to\infty} (E - E_n)$

(c) $\liminf\limits_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} E_n$

Cuando los límites inferior y superior de la sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coinciden decimos que existe el límite de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y, en tal caso, denotamos a ambos conjuntos simplemente por $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

(d) Demostrar que si $E_{n+1} \subseteq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(e) Demostrar que si $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(f) Probar que si definimos la sucesión $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de E por la fórmula recursiva

$$\begin{cases} D_1 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

entonces existe el límite de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \emptyset$.

Ejercicio 8. Sea X un conjunto. Para cada subconjunto $A \subseteq X$ se define la función $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ denominada *función característica de* A por la fórmula

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ para todo $x \in X$

(b) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)$ para todo $x \in X$

(c) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$ para todo $x \in X$

Ejercicio 9. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $f : X \to Y$ una función. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $f(\liminf_{n\to\infty} X_n) \subseteq \liminf_{n\to\infty} f(X_n)$

(b) $f(\limsup_{n\to\infty} X_n) \subseteq \limsup_{n\to\infty} f(X_n)$

(c) $f(\liminf_{n\to\infty} X_n) \subseteq \limsup_{n\to\infty} f(X_n)$

(d) Si f es inyectiva entonces en (a) y (b) vale la igualdad.

Ejercicio 10. (El conjunto ternario de Cantor) Consideramos las transformaciones afines $T_1, T_2 : [0,1] \to [0,1]$

$$T_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad T_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Definimos una sucesión de conjuntos $F_n \subset [0,1]$ por inducción

$$F_0 = [0,1], \quad F_n = T_1(F_{n-1}) \cup T_2(F_{n-1}) \ (n \geq 1)$$

y definimos el *conjunto ternario de Cantor* como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

(a) Describir geométricamente cómo es F_n.

(b) Probar que C es un compacto, y $C = T_1(C) \cup T_2(C)$ (Esta última propiedad suele expresarse diciendo que C es *auto-similar*).

(c) Probar que para cada $\varepsilon > 0$ es posible cubrir a C con finitos intervalos tales que sus longitudes suman menos que ε.

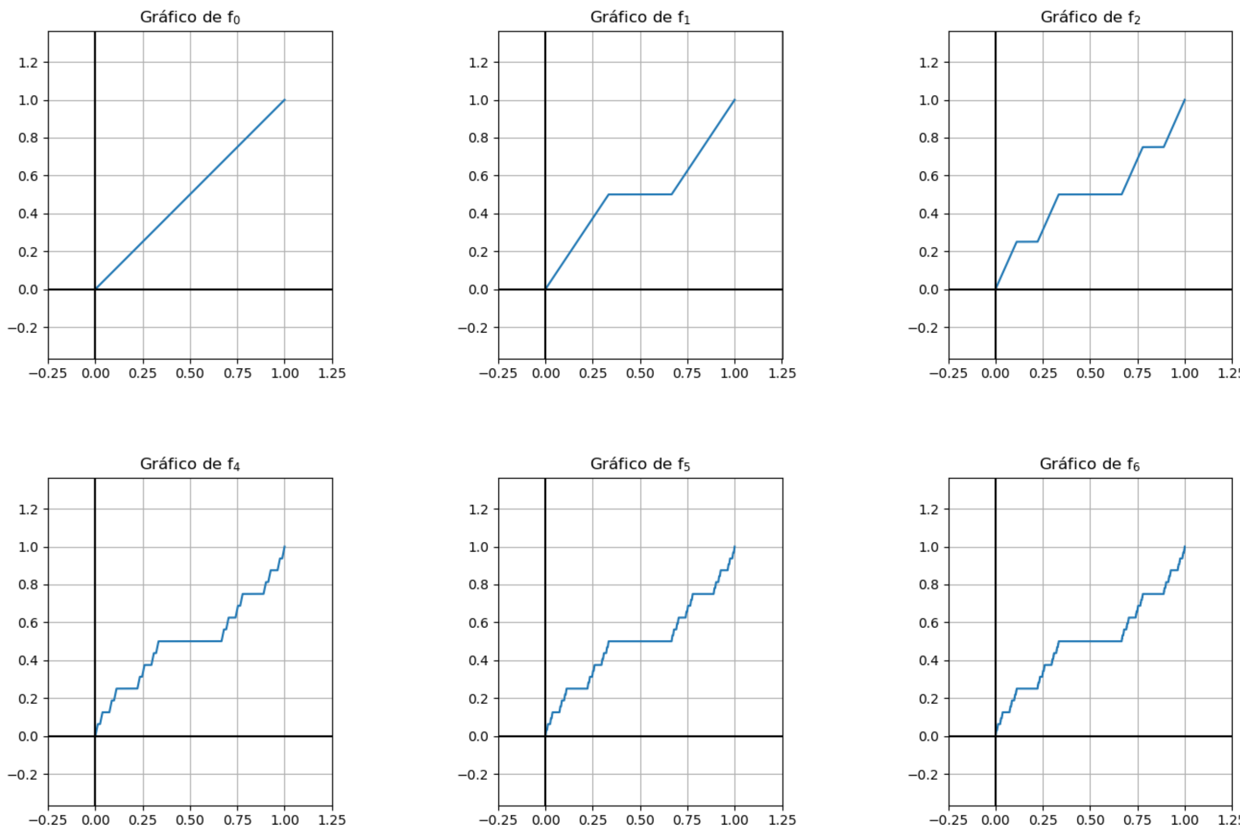
(d) Probar que un número real $x \in [0,1]$ pertenece a C si y sólo si admite un desarrollo en base 3 de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \text{ donde } d_n = 0 \text{ o } d_n = 2 \text{ para cada } n$$

(e) Probar que C tiene cardinal c (el cadinal de $\mathbb{R}$).

Ejercicio 11. (La función de Cantor-Lebesgue) Similarmente definimos inductivamente una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f_0(x) = x \text{ para todo } x \in [0,1]$$



$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & \text{si } x \in [0, 1/3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1/3, 2/3] \\ \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in (2/3, 1] \end{cases} \quad \text{para todo}\, n \geq 1$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = 1$ y f_n es continua y monótona creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) f_n converge uniformemente en $[0, 1]$ hacia una función continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ que llamamos la *función de Cantor-Lebesgue.*

(d) f es monótona creciente, $f(0) = 0, \; f(1) = 1$.

(e) f es constante en cada componente conexa del complemento del ternario de Cantor (¿Cómo es geométricamente este conjunto?)