

Examen Análisis 2

Rodrigo Negri

Octubre 2017

Ejercicio 1

Sea Γ la curva parametrizada por:

$$\Gamma : \gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), \ln(t))$$

- Demostrar que Γ es simple abierta y suave
- Considere la fuerza $F(x, y, z) = (x + y + e^{-z}, x - y + e^{-z}, e^z - 2x)$. Calcular el trabajo realizado por F al mover una partícula por Γ .

γ es simple

Para probar esto debemos ver que la parametrización es inyectiva. Supongamos que existen t y s tales que $\gamma(t) = \gamma(s)$ es decir $(e^t \cos(t), e^t \sin(t), \ln(t)) = (e^s \cos(s), e^s \sin(s), \ln(s))$, entonces $\ln(t) = \ln(s)$, pero el logaritmo es una función inyectiva (porque si $\ln(t) = \ln(s)$ entonces $t = e^{\ln(t)} = e^{\ln(s)} = s$) por lo tanto $s = t$.

γ es abierta

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, e^{\frac{\pi}{2}}, \ln(\frac{\pi}{2})) \neq (e^{6\pi}, 0, \ln(6\pi)) = \gamma(6\pi)$$

γ es suave

$$\gamma'(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\cos(t) + \sin(t)), \frac{1}{t})$$

Esta función es continua en $[\frac{\pi}{2}, 6\pi)$

Cálculo del trabajo realizado por F al mover una partícula por Γ

Observemos que:

$$F(\gamma(t)) = (e^t(\cos(t) + \sin(t)) + \frac{1}{t}, e^t + \frac{1}{t}, t - 2e^t \cos(t))$$

Y recordemos que:

$$\gamma'(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\cos(t) + \sin(t)), \frac{1}{t})$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= 2e^{2t}(\cos^2(t) - \sin^2(t)) + \frac{e^t(\cos(t) + \sin(t))}{t} + \frac{e^t(\cos(t) - \sin(t))}{t} + 1 - \frac{2e^t(\cos(t))}{t} \\ &= 2e^{2t}(\cos^2(t) - \sin^2(t)) + \frac{2e^t(\cos(t))}{t} + 1 - \frac{2e^t(\cos(t))}{t} \\ &= 2e^{2t}(\cos^2(t) - \sin^2(t)) + 1 \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_S F dS &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} (2e^{2t}(\cos^2(t) - \sin^2(t)) + 1) dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} 2e^{2t}(\cos^2(t) - \sin^2(t)) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} 1 dt \\
&= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} e^{2t} \cos(2t) dt + \frac{11\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donde en la ultima igualdad usamos la identidad trigonometrica $\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$. Por otro lado, observemos que al integrar por partes la expresi3n que nos falta resolver queda:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} e^{2t} \cos(2t) dt &= \frac{e^{2t} \cos(2t)}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} e^{2t} \sin(2t) dt \\
\int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} e^{2t} \cos(2t) dt &= \frac{e^{2t} \cos(2t)}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} + \frac{e^{2t} \sin(2t)}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} e^{2t} \cos(2t) dt \\
\int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} e^{2t} \cos(2t) dt &= \frac{e^{2t} \cos(2t)}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} + \frac{e^{2t} \sin(2t)}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} = \frac{e^{12\pi}}{2} - \frac{e^{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\int_S F dS = \frac{e^{12\pi}}{2} - \frac{e^{\pi}}{2} + \frac{11\pi}{2}$$

Ejercicio 2

Calcular el flujo saliente del campo vectorial $G(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ a traves de la superficie $\mathcal{S} : x^2 + z^2 = y^2$ con $0 \leq y \leq 2$.

Observemos que la superficie por la que pasa el flujo es la "cascara" de un cono que esta centrado en el eje y sin la tapa de su base. Por el teorema de Gauss, si $\mathcal{S}$ es la superficie del enunciado ; $\mathcal{S}' : x^2 + z^2 \leq 4$ con $y = 2$ su tapa y $\mathcal{D} : x^2 + z^2 \leq y^2$ con $0 \leq y \leq 2$ el cono lleno, tenemos:

$$\int_S G dS + \int_{S'} G dS' = \iiint_{\mathcal{D}} \nabla \cdot G d\mathcal{D}$$

Parametricemos el cono lleno por coordenadas polares de las siguiente forma:

$$T(\theta, r, y) = (r \cos \theta, y, r \sin \theta); \quad y \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, y]$$

Tenemos que $|J_T| = r$ y que $\nabla \cdot G = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_S G dS + \int_{S'} G dS' &= \int_0^2 \int_0^y \int_0^{2\pi} 3(y^2 + r^2) r d\theta dr dy \\
&= 6\pi \int_0^2 \int_0^y (ry^2 + r^3) dr dy \\
&= 6\pi \int_0^2 \left(\frac{y^4}{2} + \frac{y^4}{4}\right) dy \\
&= 6\pi \frac{3}{4} \int_0^2 y^4 dy \\
&= \frac{144\pi}{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto nos quedó:

$$\int_S G dS + \int_{S'} G dS' = \frac{144\pi}{5}$$

Calculemos entonces el flujo a través de la tapa S' dándole la siguiente parametrización:

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos(\theta), 2, r \sin(\theta)); \quad r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$$

Sus derivadas parciales son:

$$\sigma_r(r, \theta) = (\cos(\theta), 0, \sin(\theta))$$

$$\sigma_\theta(r, \theta) = (-r \sin(\theta), 0, r \cos(\theta))$$

Por lo que su normal es:

$$\sigma_r(r, \theta) \times \sigma_\theta(r, \theta) = (0, r, 0)$$

Luego el flujo a través de la tapa da:

$$\begin{aligned} \int_{S'} G dS' &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (r^3 \cos^3(\theta), 8, r^3 \sin^3(\theta)) \cdot (0, r, 0) d\theta dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 8r d\theta dr \\ &= 16\pi \int_0^2 r dr \\ &= 32\pi \end{aligned}$$

Por lo que:

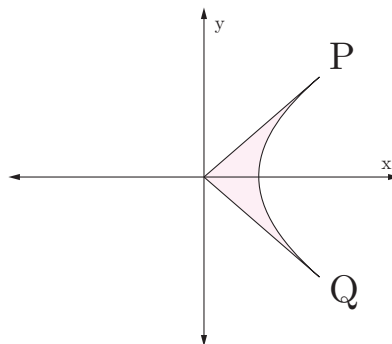
$$\begin{aligned} \int_S G dS + 32\pi &= \frac{144\pi}{5} \\ \int_S G dS &= \frac{-16\pi}{5} \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Consideremos la curva:

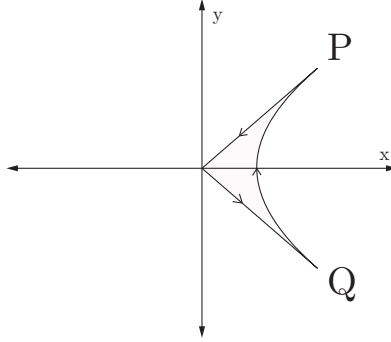
$$\sigma(t) = (\cosh(t), \sinh(t)), \quad t \in [-\ln 4, \ln 4]$$

Sean P y Q sus puntos inicial y final respectivamente, calcular el área encerrada entre la recta que une el $(0, 0)$ y el P , σ y la recta que une el $(0, 0)$ y el Q .



Primero, observemos que $P = \sigma(\ln 4) = (\frac{17}{8}, \frac{15}{8})$ y que $Q = \sigma(-\ln 4) = (\frac{17}{8}, -\frac{15}{8})$.

Consideremos el campo $F(x, y) = (0, x - y)$, y observemos que el rotor del campo $\nabla \times F = 1$ por lo que, si consideramos la curva $\mathcal{S}$ que pasa por el borde de la figura en sentido antihorario



Llamamos $\mathcal{D}$ a la region cuya area queremos calcular. el teorema de Green nos dice que:

$$\int_{\mathcal{S}} F d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} \nabla \times F dD = \iint_{\mathcal{D}} 1 dD = Area(\mathcal{D})$$

Por lo que si llamamos γ_P y γ_Q a las curvas que van desde P y Q respectivamente hasta $(0, 0)$ con una recta :

$$\int_{\sigma} F d\sigma + \int_{\gamma_P} F d\gamma_P - \int_{\gamma_Q} F d\gamma_Q = Area(\mathcal{D})$$

Parametrizamos de la siguiente forma:

$$\gamma_P(t) = (\frac{17}{8}t, \frac{15}{8}t); \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_Q(t) = (\frac{17}{8}t, -\frac{15}{8}t); \quad t \in [0, 1]$$

Tenemos:

$$\gamma'_P(t) = (\frac{17}{8}, \frac{15}{8}); \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma'_Q(t) = (\frac{17}{8}, -\frac{15}{8}); \quad t \in [0, 1]$$

$$\sigma'(t) = (\sinh(t), \cosh(t)), \quad t \in [-\ln 4, \ln 4]$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} F d\sigma &= \int_{-\ln 4}^{\ln 4} (0, \cosh(t) - \sinh(t)) \cdot (\sinh(t), \cosh(t)) dt \\ &= \int_{-\ln 4}^{\ln 4} (0, e^{-t}) \cdot (\sinh(t), \cosh(t)) dt \\ &= \int_{-\ln 4}^{\ln 4} e^{-t} \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt \\ &= \int_{-\ln 4}^{\ln 4} (\frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}) dt \\ &= \ln 4 + \frac{4^{-2} - 4^2}{4} \\ &= \ln 4 - \frac{255}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_P} F d\gamma_P &= \int_0^1 (0, \frac{17}{8}t - \frac{15}{8}t) \cdot (\frac{17}{8}, \frac{15}{8}) dt \\
&= \int_0^1 (0, \frac{1}{4}t) \cdot (\frac{17}{8}, \frac{15}{8}) dt \\
&= \int_0^1 \frac{15}{32}t dt \\
&= \frac{15}{64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_Q} F d\gamma_Q &= \int_0^1 (0, \frac{17}{8}t + \frac{15}{8}t) \cdot (\frac{17}{8}, -\frac{15}{8}) dt \\
&= \int_0^1 (0, 4t) \cdot (\frac{17}{8}, -\frac{15}{8}) dt \\
&= \int_0^1 -\frac{15}{2}t dt \\
&= -\frac{15}{4}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$Area(\mathcal{D}) = \ln 4 - \frac{255}{64} + \frac{15}{64} + \frac{15}{4} = \ln 4$$

Ejercicio 4

Sean $h, R > 0$ y la curva $\mathcal{C} = (x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, z = h$ recorrida en el sentido antihorario cuando se considera su proyección en el plano x, y . Sea el campo

$$F(x, y, z) = (\frac{yz}{x^2 + y^2}, \frac{-xz}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2), \quad \forall (x, y, z) \neq (0, 0, z)$$

- Calcular la circulación del campo F a lo largo de $\mathcal{C}$.
- Calcular el flujo saliente del campo $G = \text{rotor}(F)$ a través de la superficie $\mathcal{S} : x^2 + y^2 = R^2, 1 \leq z \leq 5$.

La circulación del campo F a lo largo de $\mathcal{C}$

Parametrizamos $\mathcal{C}$ de la siguiente forma:

$$\sigma(\theta) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta), h)$$

$$\sigma'(\theta) = (-R \sin(\theta), R \cos(\theta), 0)$$

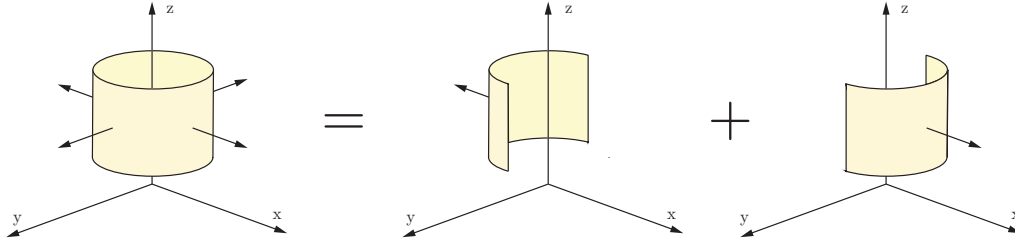
Por lo que la circulación nos queda:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} F d\mathcal{C} &= \int_0^{2\pi} F(\sigma(\theta)) \cdot \sigma'(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin(\theta)h, -\cos(\theta)h, R) \cdot (-R \sin(\theta), R \cos(\theta), 0) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-R \sin^2(\theta)h - R \cos^2(\theta)h) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-Rh) d\theta \\
&= -2\pi Rh
\end{aligned}$$

El flujo del campo G a través de $\mathcal{S}$

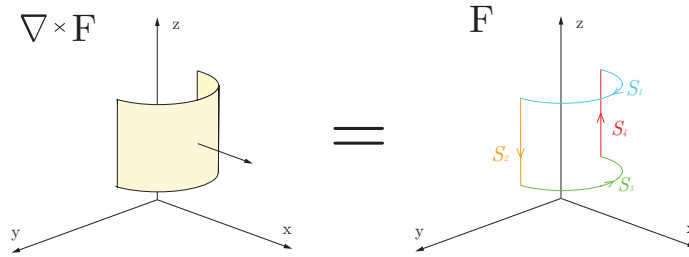
Observemos lo siguiente: si consideramos las superficies $\mathcal{S}' : x^2 + y^2 = R^2, 1 \leq z \leq 5, y \leq 0$ y $\mathcal{S}'' : x^2 + y^2 = R^2, 1 \leq z \leq 5, y > 0$ tenemos que $\mathcal{S}$ es unión disjunta de $\mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}''$ y nos queda:

$$\int_{\mathcal{S}} G d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}'} G d\mathcal{S}' + \int_{\mathcal{S}''} G d\mathcal{S}''$$



Por el teorema de Stokes si orientamos el borde de forma tal que la normal apunte al exterior tenemos que:

$$\int_{\partial\mathcal{S}''} F d\partial\mathcal{S}'' = \int_{\mathcal{S}''} \nabla F d\mathcal{S}'' = \int_{\mathcal{S}''} G d\mathcal{S}''$$



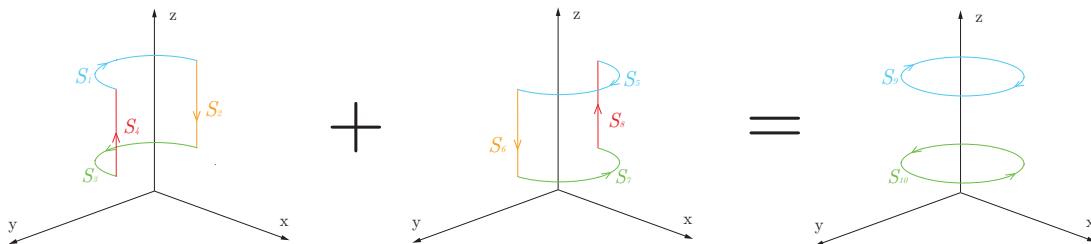
Y, análogamente, $\int_{\partial\mathcal{S}'} F d\partial\mathcal{S}' = \int_{\mathcal{S}'} G d\mathcal{S}'$.

Sumando estas observaciones, tenemos que:

$$\int_{\mathcal{S}} G d\mathcal{S} = \int_{\partial\mathcal{S}''} F d\partial\mathcal{S}'' + \int_{\partial\mathcal{S}'} F d\partial\mathcal{S}'$$

Además si subdividimos los bordes como en la siguiente figura la circulación de F sobre S_2 se cancela con la de S_8 y la de S_4 con la de S_6 por lo que nos queda:

$$\int_{\mathcal{S}} G d\mathcal{S} = \int_{S_9} F dS_9 + \int_{S_{10}} F dS_{10}$$



Tambien observemos que S_{10} es una curva como el inciso anterior con $h = 1$ y S_9 es una curva como el inciso anterior con $h = 5$ y la orientacion inversa por lo que:

$$\int_S G dS = 2\pi R.5 - 2\pi R.1 = 8\pi R$$

NOTA: El ejercicio sale mas directo tomando directamente como borde del cilindro a S_{10} y S_9 orientados de esta misma forma y aplicando Stokes pero fue hecho de esta forma para intentar dar un poco mas de claridad sobre como quedan las orientaciones en el borde. También sale a mano aplicando la definición de flujo de campo a traves de una superficie.