

Práctica 5: Extremos

1. Sea $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, calcular máximos y mínimos absolutos en el intervalo $[-5,5]$. Hacer un gráfico aproximado de la función.
2. La empresa Pejsi quiere fabricar “Narajsi”, un nuevo producto sabor naranja que saldrá al mercado envasado en latitas de volumen V . ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Pejsi minimice el costo de aluminio?
3. (a) Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^4$ y de $g(x, y) = x^4 + y^4$, y en dichos puntos sus hessianos.
(b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$, ¿es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?.
4. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:
 - (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$
 - (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$
 - (c) $f(x, y) = xy$
 - (d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$
5. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Probar que:
 - (a) $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.
 - (b) el determinante de la matriz $Hf(0, 0)$ es cero.
 - (c) f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ sobre cada recta que pase por $(0, 0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b .
6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.
 - (a) Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico pero no un extremo.
 - (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?
7. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura.
 - (a) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$
 - (b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
 - (c) $f(x, y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

- (d) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$
 (e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$
 (f) $f(x, y) = (x - y)^2 + 1 + 2(x - y)$
 (g) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
 (h) $f(x, y, z) = xy + z^2$
 (i) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$
 (j) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$
 (k) $f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}, x \in \mathbb{R}^n$

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

- $f(0, 1) = 0$,
- $\nabla f(0, 1) = (0, 2)$,
- $Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$,

- (a) Calcular $Hg(0, 1)$.
 (b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0, 1)$?

9. Sea $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$.

- (a) Probar que el punto $(0, 0)$ es punto crítico de f y calcular el hessiano en dicho punto.
 (b) Probar que f a lo largo de cualquier recta que pase por el origen tiene un mínimo en 0.
 (c) Muestre que el origen es punto silla de f y analice porqué esto no contradice al ítem anterior.

Sugerencia: considere la curva $\alpha(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$.

10. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x, y) = e^{y^4 - x^2} + a(x - y) + b(x - 2)(y - 1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2, 1)$.

11. Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es

$$P(x, y) = 1 + 2x - y + xy - x^2 + y^2,$$

¿tiene

$$g(x, y) := f(x, y) - 2x + y + x^2y$$

un mínimo local en $(0, 0)$?