

Práctica 4:

Derivadas parciales de orden superior - Polinomio de Taylor

---

Derivadas de orden superior

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase  $C^2$ :

(a)  $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$

(b)  $f(x, y, z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy \operatorname{sen}(z)$

(c)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln(z)$

2. Calcular todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y, z) = xyz$

(c)  $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y) - \operatorname{sen}(y^2z)$

(b)  $f(x, y, z) = e^{xyz}$

(d)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$

3. Sea  $f(x, y) = \cos(xy)$ . Además,  $x$  e  $y$  son funciones de las variables  $u$  y  $v$  de acuerdo a las siguientes fórmulas:  $x(u, v) = u + v$ ,  $y(u, v) = u - v$ . Calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x(u, v), y(u, v)) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2} f(x(u, v), y(u, v))$$

(a) Sustituyendo

(b) Usando la regla de la cadena.

Laplaciano - Función armónica

4. Se dice que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  si:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

Verificar que las siguientes funciones son armónicas en  $U \subset \mathbb{R}^3$  abierto. Determinar  $U$  en cada caso:

(a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

(c)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(b)  $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

(d)  $f(x, y, z) = e^{3x+4} \cos(3z) + 4y$

5. Sean  $f, g$  dos funciones  $C^2$  definidas en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Probar que  $f$  y  $g$  son armónicas en  $U$ .

### Polinomio de Taylor

6. (a) Desarrollar la función  $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$  en potencias de  $x - 2$ ;  
 (b) Desarrollar la función  $g(x) = \sqrt{x}$  en potencias de  $x - 1$  hasta orden 3.  
 (c) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función  $f(x) = \ln(x+1)^2$ .  
 (d) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función  $g(x) = e^{x+2}$ .
7. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto para la función  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .  
 (b) Evaluar el error de la igualdad aproximada  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$  cuando  $x = 0, 2$ .
8. (a) Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Hallar el polinomio de Maclaurin de grado  $n$  de la función  $y = (1+x)^\alpha$ .  
 (b) Calcular el valor de  $(1, 3)^{2/3}$  con error menor que  $1/100$ .
9. Calcular:  
 (a) el número  $e$  con error menor que  $10^{-4}$ ;  
 (b)  $\ln \frac{2}{3}$  con error menor que  $10^{-3}$ .
10. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.
- a)  $f(x, y) = (x + y)^2$  en  $(0, 0)$   
 b)  $f(x, y) = e^{x+y}$  en  $(0, 0)$   
 c)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$  en  $(0, 0)$   
 d)  $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$  en  $(1, 0)$   
 e)  $f(x, y) = \text{sen}(xy)$  en  $(1, \pi)$   
 f)  $f(x, y) = e^x \text{sen}(y)$  en  $(2, \frac{\pi}{4})$   
 g)  $f(x, y) = \ln(1 + xy)$  en  $(2, 3)$   
 h)  $f(x, y) = x + xy + 2y$  en  $(1, 1)$   
 i)  $f(x, y) = x^y$  en  $(1, 2)$   
 j)  $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$  en  $(2, 3, 4)$

11. Utilizando los resultados anteriores calcular  $(0.95)^{2.01}$

- (a) con error menor que  $1/200$ .
- (b) con error menor que  $1/5000$ .

12. Sea  $f(x, y) = xe^y$ .

- (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de  $f$  en el punto  $P = (1, 0)$ .
- (b) Usar este polinomio para aproximar el valor  $f(0,98; 0,02)$ . Estimar el error cometido.

13. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de  $|x|, |y|$ .

14. (a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en  $(1, 1)$  de la función  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$
- (b) Usar la parte a) para evaluar  $e^{\frac{4}{10}}$  usando que  $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$ .  
Comprobar que el error que cometió es menor que 0.3

15. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x, y) = \text{sen}(x) \text{sen}(y).$$

16. Dada  $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$  y sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, tal que el polinomio de Taylor de grado 2 de  $g \circ f$  en  $(0, 0)$  es

$$4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

Calcular  $\nabla g(1, -1)$ .

17. Sea  $f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$ .

- (a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de  $f$  centrado en  $(0, 0)$ .
- (b) Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

18. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^3$  tal que su polinomio de Taylor de orden 3 en  $(1, 1)$  es  $p(x, y) = 1 - 3x + x^2 + xy + y^2 - y^3$ . Analizar la existencia de los siguientes límites:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|}, \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|^2}.$$