

Práctica 3: Diferenciación

Aplicación de algunos resultados de diferenciación en una variable

1. Verificar que se cumple el Teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $[1, 2]$.

(b) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en $[1, 3]$.

(c) $f(x) = \sin^2 x$ en $[0, \pi]$.

2. Probar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x - 3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ pero no existe $c \in (1, 5)$ tal que $f'(c) = 0$ ¿Por qué no se puede aplicar el Teorema de Rolle?

3. (a) Sea f un polinomio con al menos k raíces distintas, probar que f' tiene al menos $k - 1$ raíces distintas.

(b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.

(c) Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) := e^{a^2x} + x^3 + x$. Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

4. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f'(x) = g'(x) \forall x \in (a, b)$, entonces $f(x) = g(x) + c \forall x \in (a, b)$, donde c es una constante.

(b) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente.

(c) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente.

5. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange, mostrar que son válidas las siguientes acotaciones.

(a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $|1/x - 1/y| \leq |x - y|$, para $x, y > 1$.

(c) $|\arctan x - \arctan y| \leq \frac{1}{2} |x - y|$, para $x, y \geq 1$.

6. Hallar, explícitamente, el punto intermedio cuya existencia está garantizada por el Teorema de Cauchy en el caso de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$.

7. Utilizando el Teorema de Cauchy, calcular:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, siendo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x^2 - y^2} & \text{si } x \neq y \\ -1/2 & \text{si } x = y \end{cases}$.

- (b) $\sup_{x,y \in [0,2]} f(x,y)$ y $\sup_{x,y \in [1,2]} f(x,y)$, siendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4 - 4(x^3 - y^3) + 4(x^2 - y^2)}{y^2 - x^2} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Derivadas parciales y direccionales

Notamos por $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ o $f_v(x_0, y_0)$ a la **derivada direccional** de f en dirección v en el punto (x_0, y_0) ; y por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ o $f_x(x_0, y_0)$ (análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$) a la **derivada parcial** de f respecto de x (derivada parcial de f respecto de y) en el punto (x_0, y_0) . Extendemos esta notación a más variables.

8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $x = a$. Probar que f es derivable en $x = a$ si y solo si existe una única función afín $L(x) = m(x - a) + b$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - L(x)}{x - a} = 0.$$

Calcular el valor de m y de b .

Al gráfico de la función $L(x)$ se lo denomina **recta tangente** a $f(x)$ en el punto $x = a$.

9. Para cada una de las siguientes funciones $f(x,y)$, calcular la derivada direccional en dirección v en el punto (x_0, y_0) .

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $v = (1,0)$, $(x_0, y_0) = (1,2)$ y $v = (0,1)$, $(x_0, y_0) = (1,2)$.

(b) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 + y - 5$, $v = (1,1)$, $(x_0, y_0) = (2,3)$ y $v = (1,2)$, $(x_0, y_0) = (0,1)$.

(c) $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2)$, $v = (0,1,0)$, $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,2)$.

(d) $f(x,y) = (x+1)\text{sen } y - 2$, $v = (1,0)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(e) $f(x,y) = \|(x,y)\|$, $v = (a,b)$, $(x_0, y_0) = (0,0)$ con $\|(a,b)\| \neq 0$.

10. (a) Considerar la función $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ y la dirección $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, y calcular las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2,1)$.

(b) Calcular la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$.

(c) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Calcular la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para todo vector unitario v .

11. Calcular todas las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a) $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$ (e) $f(x, y, z) = z[\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1)]$
 (b) $f(x, y, z) = ye^x + z$ (f) $f(x, y) = xe^{x^2 + y^2}$
 (c) $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}^2(y)$
 (d) $f(x, y) = \operatorname{sen} x$ (g) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

12. Probar que la función $f(x, y) = |x| + |y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

13. Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Probar que las únicas direcciones $v \in \mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direccional f_v en el origen son $v = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$.

Probar que, sin embargo, la función no es continua en el origen.

14. Considerar la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Probar que f admite derivadas direccionales en el origen en dirección de cualquier vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$ y que, sin embargo, f no es continua en el origen.

15. Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

(a) Mostrar, utilizando la definición de derivada direccional, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

y que $\pm(1, 0), \pm(0, 1)$ son las únicas direcciones en las cuales existe la derivada direccional en el origen.

(b) Mostrar que f es continua en $(0, 0)$.

Diferenciabilidad

16. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen.

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left(4 \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$17. \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero f no es diferenciable.

$$18. \text{ Sea } f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

(a) Encontrar las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t + 1, 3, f(t + 1, 3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t + 1, t + 3, f(t + 1, t + 3)).$$

(b) Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x, y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{\|(x, y) - (1, 3)\|} = 0.$$

19. Sean f una función diferenciable en $(1, 2)$ tal que $f(1, 2) = 3$, y $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$ vectores tales que $\frac{\partial f}{\partial v_1}(1, 2) = 3$ y $\frac{\partial f}{\partial v_2}(1, 2) = 4$.

(a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

(b) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1, 2, f(1, 2))$.

20. Estudiar la existencia del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos indicados. De existir, escribir la ecuación del plano.

(a) $f(x, y) = xy + 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1, 5)$ y en $(2, 2)$.

(b) $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0, 0)$ y en $(16, 1)$.

(c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

(d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ en } (0, 0) \text{ y en } (-1, 1).$$

$$(f) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3 + x^2(y^2 - 6y + 7) + (y - 1)^2(6x + 12 - 8y)}{x^2 + 2(y - 1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

en $(0, 1)$.

21. Aproximar el valor $(0, 99e^{0,02})^8$ utilizando el plano tangente al gráfico de una función adecuada.

22. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

(a) Toda función de la forma $f(x, y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^2 .

(b) El plano tangente al gráfico de la función $f(x, y) = x^2 - xy + y^3$ en el punto $(1, 1)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, -1).$$

(c) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $(2, -1)$ con plano tangente

$$z = 2x - 3y + 2$$

entonces la función $g(x, y) = 3x - 2f(x, y) + 5$ es diferenciable en el punto $(2, -1)$ con plano tangente

$$z = -x + 6y + 1.$$

(d) El plano tangente al gráfico de la función $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^3$ en el punto $(1, 2)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, -1, 4).$$

(e) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0, 1)$ y el plano tangente al gráfico de la función $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto $(0, 1)$ es $z = 0$, entonces la función $h(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) := f(x, y) g(x, y)$$

es diferenciable en el punto $(0, 1)$.

(f) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0, 0)$ entonces la función

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)f(x, y)$$

es diferenciable en el punto $(0, 0)$ y su plano tangente asociado es $z = 0$.

Interpretación geométrica del vector gradiente

23. Encontrar la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud, $\|\nabla z\|$, en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.
24. Suponiendo que la función $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x, y) y que se está parado en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son iguales a $(1, 0)$, ¿en qué dirección se debería caminar para escalar más rápido?
25. (a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.
- (b) Si una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función

$$f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 4 \cos(3y),$$

encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento en el punto $(\pi/3, \pi/3)$.

26. Dada la función $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^4$, verificar cada una de las siguientes afirmaciones:
- (a) f crece en la dirección $(0, 1)$ desde el punto $(1, 1)$.
- (b) Desde el punto $(1, 1)$ el mayor crecimiento de f se da en la dirección $(2, 2)$.
- (c) Desde el punto $(1, 1)$, f decrece si nos movemos en la dirección $(-1, 0)$.
- (d) Desde el punto $(1, 1)$ crece en la dirección $(0, 1)$.

Generalización a varias variables

27. Calcular el gradiente de f para
- (a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$
- (b) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$
- (c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$
28. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$.
- (a) Verificar que T es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3).
- (b) Calcular la matriz de la diferencial $DT(a)$ para $a \in \mathbb{R}^2$ y verificar que coincide con la matriz hallada en el ítem anterior.

29. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal.

(a) Supongamos que T verifica

$$\lim_{v \rightarrow \vec{0}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = 0,$$

donde $\vec{0}$ denota el vector nulo. Probar que T es la transformación lineal nula; es decir que para cada $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $T(w) = \vec{0}$.

(b) Asumiendo que T es diferenciable, deducir que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ la diferencial $DT(a)$ es igual a T .

30. Para cada una de las siguientes funciones, calcular $DF(a)$ para todo a en el dominio de F .

(a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$

(b) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

(c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$

(d) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \|x\|^2$

Regla de la cadena

31. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con derivada positiva en todo punto, y

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty.$$

(a) Probar que f es biyectiva.

(b) Usando el hecho de que f^{-1} es derivable (no hace falta probarlo) concluir que, si $y \in \mathbb{R}$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Mostrar que la derivada de $\arctan(x)$ es $\frac{1}{1+x^2}$.

32. Sean $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x, y) = x \operatorname{sen}(y)$ y la siguiente dependencia respecto de t (una variable distinta),

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \operatorname{sen} t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \operatorname{sen} t, y(t) = t.$$

Calcular las derivadas respecto de t de las funciones

$$f(u(t), v(t), w(t)) \text{ y } g(x(t), y(t)),$$

de dos formas diferentes:

(a) usando regla de la cadena,

(b) sustituyendo y luego derivando.

33. Sean $f(u, v) = e^{uv} \operatorname{sen}(u^2 + v^2)$, $g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$. Dadas

$$u(x, y) = x + y, \quad v(x, y) = xy, \quad w(x, y) = x - y + 1$$

calcular las derivadas parciales de las funciones

$$f(u(x, y), v(x, y)) \quad \text{y} \quad g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

(a) usando regla de la cadena,

(b) sustituyendo y luego derivando.

34. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables y $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$(a) \quad F(x, y) = G(f(x)g(y), f(x)h(y)) \quad (b) \quad F(x, y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$$

$$(c) \quad F(x, y) = G(x, G(x, y)) \quad (d) \quad F(x, y) = f(x)^{g(y)} \quad (\text{si } f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

35. (a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^p \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable en \mathbb{R}^2 ?

¿Para qué valores de p , f es de clase C^1 ?

(b) La función f se puede escribir como $g(x^2 + y^2)$ con $g(t) = t^p \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$, ¿qué se puede decir acerca de la diferencibilidad de g ?

36. Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Se dice que f es *homogénea de grado 1* si $\forall t > 0$ y $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ se verifica

$$f(t(x, y)) = tf(x, y).$$

Probar que f es homogénea de grado 1 si y solo si

$$\nabla f(x, y) \cdot (x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

37. (a) Sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable sobre B , una bola en \mathbb{R}^2 .

i. Probar que si f es una función constante en B , entonces $\nabla f(a, b) = 0$, $\forall (a, b) \in B$.

ii. Probar que si $\nabla f(a, b) = 0 \quad \forall (a, b) \in B$, entonces f es constante sobre B .

Sugerencia: utilizar el Teorema de Valor Medio.

(b) Sean $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables que verifican la siguiente propiedad $\nabla f(a, b) = \nabla g(a, b) \quad \forall (a, b) \in B$.

Probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = g(x, y) + c.$$