ÁLGEBRA LINEAL (MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA)

Práctica 5 - Autovalores y Valores singulares

Año 2017

1. Encontrar los autovalores y los autoespacios correspondientes para cada una de las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificar, para cada una de las matrices anteriores, que la suma de los autovalores es la traza de A (es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A), y que el producto de los autovalores es el $\det(A)$.

2. Probar que: $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Leftrightarrow A$ no es inversible.

3. Si A tiene autovalor λ, demostrar que:

(a) λ es autovalor de A^t

(b) la matriz kA tiene autovalor $k\lambda$

(c) la matriz A^r tiene autovalor λ^r, $r \in \mathbb{N}$

(d) si A es inversible, $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}

(e) $A + kI$ tiene autovalor $\lambda + k$

(f) $\lambda^2 + \lambda$ es autovalor de $A^2 + A$.

4. Para cada una de las matrices del ej. 1, determinar si A es o no diagonalizable. En el caso que A es diagonalizable verificar que, si U es la matriz cuyas columnas forman una base de autovectores, entonces $AU = UD$ donde D es una matriz diagonal con los autovalores en la diagonal.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \to 0$ (es decir:$(A^n)_{ij} \to 0$, $1 \leq i, j \leq 3$).

6. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar 2 matrices distintas U y $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversibles tales que $D = U^{-1}AU$ y $D' = V^{-1}AV$ sean diagonales. ¿Vale $D = D'$?

7. Dar un ejemplo para mostrar que los autovalores pueden alterarse cuando se sustrae de una fila un múltiplo de otra.

8. i) Diagonalizar la matriz $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz de probabilidad (es decir, sus coeficientes están en el intervalo $[0, 1]$ y la suma de los coeficientes de cada fila da 1) y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son sus autovalores, probar que $\lambda_1 = 1$ y $|\lambda_2| \leq 1$.

Procesos de Markov

9. Un país, cuya población es constante está dividido en dos regiones. Cada año 1 de cada 10 residentes de la región A se traslada a la región B mientras que 1 de cada 5 habitantes de la zona B se muda a la región A. En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la región A y 30 millones en la B.

(a) Escribir la matriz de transición para este proceso.

(b) Determinar si existe un estado de equilibrio.

(c) Calcular el estado de la población dentro de 10 años y dentro de 30 años.

10. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos.

- Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k- ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes. Encontrar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que
$$A^t \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix}.$$
- Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o al término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$ (o sea de ningún enfermo y 10000 sanos), ¿Cuál es el número de enfermos al cabo del 6 meses?, ¿Cuál es el número de muertos al cabo del 1 año?.
- Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), el k-ésimo estado (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (i.e, a un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$) es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que en el modelo propuesto los individuos se enferman o se mueren pero ni se curan ni hay nacimientos).

Valores singulares

11. Hallar los valores singulares de cada una de las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificar que el rango de A es igual a la cantidad de valores singulares no nulos.

12. Calcular la pseudoinversa de A para las primeras 3 matrices del ejercicio anterior.

13. Verificar que las pseudoinversas A^+ obtenidas en el ejercicio previo satisfacen las siguientes propiedades:

i) $AA^+A = A$
ii) $A^+AA^+ = A^+$
iii) $(AA^+)^t = AA^+$
iv) $(A^+A)^t = A^+A$

(De hecho, A^+ es la única que satisface las 4 propiedades).

14. Para la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar los valores singulares de A y calcular $\|A\|_2$.
(b) Encontrar la descomposicin en valores singulares de A, i.e., hallar matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = U\Sigma V'$ con $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ la matriz que tiene los valores singulares de A en su “diagonal”.

15. Encontrar la solución mínima de $Ax = b$ (i.e, la solución x tal que $\|x\|$ y $\|Ax - b\|$ sean mínimos) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$