ÁLGEBRA LINEAL (MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA)

Práctica 4 - Determinantes

Año 2017

1. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con $\det(A) = 8$. Calcular $\det(3A)$, $\det(-A)$ y $\det(-2A^{-1})$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 2$. Calcular:

(a) $\det(A^3)$.

(b) $\det(-2 \cdot A^3)$.

(c) $\det((-2 \cdot A)^3)$.

(d) $\det(A^{-3})$.

(e) $\det(B \cdot A \cdot B^{-1})$, $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ inversible.

4. Si A y A^{-1} tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 ó -1 ?

5. Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} sen^2 a & 1 & cos^2 a \\ sen^2 b & 1 & cos^2 b \\ sen^2 c & 1 & cos^2 c \end{pmatrix}$$

6. Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible en cada uno de las siguientes casos:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & k \\ k & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & k \end{pmatrix}$

7. Clasificar el sistema lineal

$$S : \begin{cases} -x + ay + z &= a \\ -x + (1-a)z &= 1 \\ -x + y + z &= a^2 \end{cases}$$

en términos del valor $a \in \mathbb{R}$, usando determinantes.

8. Hallar, usando triangulación,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. (a) Sea $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Probar que A es una matriz ortogonal y calcular $\det(A)$.

(b) Interpretar geométricamente dado un vector v el resultado de hacer Av.

(c) ¿Cuánto vale el determinante de una matriz ortogonal? ¿Cuál es el rango?

10. Hallar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal con $\det(A) = -1$.

11. *Regla de Cramer en* 2×2*:*

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Probar que la solución del sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

es (x_1, x_2) con

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix}}{\det(A)} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)}.$$

12. Para aquellos valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema del ejercicio **7** es compatible determinado, hallar la solución usando la regla de Cramer. ¿ Cuál es, en particular, la solución para $a = 2$?

13. Encontrar un ejemplo de 4×4 en el que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A).\det(D) - \det(B).\det(C)$$

donde A, B, C, D son matrices de 2×2.

14. Calcular el rango de las matrices del ejercicio **5**.

15. (a) Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale el determinante de A?

(b) Si $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}^3$ no nulos, ¿cuál es el rango de A?