MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA – ALGEBRA LINEAL

Práctica 3 - Proyección ortogonal y Cuadrados Mínimos

Año 2017

1. (a) Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$.

(b) Sea $u = (1, -1)$. Hallar v tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$ y

(c) Sea $u = (-2, 1)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$.

(d) Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u\rangle = 0$.

2. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$:

(a) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ y $u \neq 0$, entonces $v = w$.

(b) Si $\langle u, v\rangle = 0$, $\forall v$, entonces $u = 0$.

3. (a) Sean $u = (1, 2)$ y $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.

(b) Sean $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Probar que, $\forall\ w \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $w = \langle w, u\rangle u + \langle w, v\rangle v$.

4. (a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1); (0, 1, -1); (1, 1, 1)\}$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

(b) Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en $\mathcal{B}'$. (Sug: recuerde $\langle\ ,\ \rangle$.)

(c) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$$

5. Sea la recta $S = \langle(3, 4)\rangle$ en $\mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

(a) $p(-4, 3)$, $p(3, 4)$ y $p(2, 1)$

(b) Una fórmula para $p(x_1, x_2)$

(c) $[p]_{\mathcal{E}}$

(d) $S^{\perp}$

(e) La distancia de los puntos $(-4, 3), (3, 4)$ y $(2, 1)$ a la recta S

(f) Una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3)/\ 2x_1 - x_2 = 0\}$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

(a) Una base $\mathcal{B}$ ortonormal del subespacio S.

(b) $M \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ la matriz que tiene por columnas a los vectores de $\mathcal{B}$.

(c) Verificar que $[p]_{\mathcal{E}} = M.M^t$.

7. Sea

$$S = \langle(1, 1, 0), (0, 2, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1)$ y calcular la distancia de $(0, 1, 1)$ a S.

8. Hallar una base ortonormal y el complemento ortogonal para cada uno de los subespacios que siguen:

(a) $S_1 = \{\lambda(1, 2, 1);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

(b) $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 /\ x_1 + 2x_2 = 0\}$

(c) $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 /\ 3x_1 + x_2 = 0\}$

9. Sea $\mathcal{B}'$ la base hallada en el ejercicio **4**. Calcular $Q = C_{\mathcal{E}\mathcal{B}'}$, siendo $\mathcal{E}$ la base canónica. Verificar que $QQ^t = Id$, i.e., $Q^{-1} = Q^t$.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Pruebe que $\mathrm{Nu}(A)$ es ortogonal a $\mathrm{Im}(A)$.

11. Encontrar una tercera columna para que la matriz Q sea ortogonal siendo $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \end{pmatrix}$.

¿Cuántas soluciones hay? Interprete geométricamente.

12. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \langle (1, 1, 0), (-1, 0, 2), (1, 2, 2)\rangle$$

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\right\}$$

(a) Hallar una base y la dimensión de S_1.

(b) Hallar una base y la dimensión de S_2.

(c) Hallar una base y la dimensión del subespacio $S_1 \cap S_2$.

CUADRADOS MÍNIMOS

13. Hallar la recta $y = ax+b$ que ajusta por cuadrados mínimos la siguiente tabla y calcular el error $\sum(y_k - (ax_k + b))^2$.

x_k	0	1	-1	2
y_k	1	3	2	4

14. Mismo ejercicio con la siguiente tabla:

x_k	6	4	8	5	3.5
y_k	6.5	4.5	7	5	4

Estimar el valor de y correspondiente a $x = 7.5$.

15. La siguiente tabla tiene la altura y el peso de 6 hombres entre 25 y 29 años de edad:

Altura (metros)	1.83	1.73	1.68	1.88	1.63	1.78
Peso (kilogramos)	79	69	70	81	63	73

(a) Ajustar linealmente estos datos.

(b) Estimar el peso de un hombre de 27 años y 1.75 m de altura.

(c) Estimar la altura de una persona de 28 años y 68 kg. de peso.

16. Ajustar una parábola por el método de los cuadrados mínimos de acuerdo a la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.1	3.3	3.9	4.4	4.6	4.8	4.6	4.2	3.4

Rta: $y = 0.9433 + 1.3507x - 0.1189x^2$.

17. Para el modelo $y = \frac{x^2+1}{ax+b}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, calcular la mejor aproximación en el sentido de los cuadrados mínimos, a partir de los siguientes datos:

x	0	1	2	3
y	0.6	0.5	1	1.5

18. Ajustar la siguiente tabla de datos mediante una función exponencial de la forma $y = k \cdot a^x$:

x	0	1	2	3	4
y	2	3	6	9	15