

## Algebra III

### Práctica 4 - Extensiones de Galois y teorema

*2do cuatrimestre 2017*

**Ejercicio 1.** Sean  $E/K$  y  $L/K$  dos extensiones finitas. Probar que si  $E/K$  y  $L/K$  son  $K$ -isomorfas, entonces sus grupos de Galois son isomorfos. ¿Vale la recíproca? ¿Y si son extensiones de Galois?

**Ejercicio 2.** Sea  $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2}}]$ . Probar que  $E/\mathbb{Q}$  es normal, calcular su grupo de Galois  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  y determinar todas sus subextensiones.

**Ejercicio 3.** Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio  $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 4.** Determinar todas las subextensiones cuadráticas del cuerpo de descomposición de  $X^4 - 2X^2 - 1$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $\Phi_n = f(\xi_n, \mathbb{Q})$  el  $n$ -ésimo polinomio ciclotómico. Sea  $K/\mathbb{Q}$  una extensión tal que  $\Phi_n$  es irreducible en  $K[X]$ . Probar que  $K[\xi_n]/K$  es normal de grado  $\varphi(n)$  y que  $\text{Gal}(K[\xi_n]/K) \cong \mathcal{U}_n$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $K$  un cuerpo con  $\text{car}(K) \neq 2$ , y sea  $\alpha, \beta \in K$  tales que  $\alpha, \beta$  y  $\alpha\beta$  no son cuadrados en  $K$ . Si  $a^2 = \alpha$  y  $b^2 = \beta$ , caracterizar  $\text{Gal}(K[a, b]/K)$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $K$  un cuerpo con  $\text{car}(K) \neq 2$ .

1. Sea  $E/K$  una extensión de Galois tal que  $\text{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Probar que  $E = K[a, b]$  con  $a^2, b^2 \in K$ .
2. Generalizar el resultado de (1) para  $\text{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$  ( $n$  sumandos).

**Ejercicio 8.**

1. Probar que  $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{11})]$  es la única subextensión de grado 5 de  $\mathbb{Q}[\xi_{11}]/\mathbb{Q}$ .
2. Probar que  $\mathbb{Q}[\xi_{11}]/\mathbb{Q}$  tiene una única subextensión de grado 2. Determinarla.

**Ejercicio 9.** Sea  $E/K$  una extensión de Galois de grado 15. Probar que  $E/K$  tiene solo dos subextensiones propias. Calcular sus grados y ver que dichas subextensiones son normales.

**Ejercicio 10.** Sea  $E/K$  una extensión de Galois de grado 45. Probar que si  $F/K$  es una subextensión de grado 3 de  $E/K$ , entonces es normal.

**Ejercicio 11.** Sea  $p \in \mathbb{N}$  primo y sea  $E/K$  una extensión de Galois de grado  $p^n s$  con  $n, s \in \mathbb{N}$  y  $p \nmid s$ . Probar que:

1.  $E/K$  tiene subextensiones de grado  $s$  y todas ellas son isomorfas.
2. Si  $p > s$  entonces hay una única subextensión de grado  $s$ , que además, resulta ser normal.

**Ejercicio 12.** Sea  $E/K$  una extensión algebraica. Probar que existe una subextensión  $L/K$  abeliana maximal (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas). ¿Cual es en el caso en que  $E$  es el cuerpo de descomposición de  $X^4 - 2$  sobre  $\mathbb{Q}$ ?

**Ejercicio 13.**

1. Sean  $E/K$  y  $F/K$  dos subextensiones finitas de una extensión  $L/K$ . Probar que  $EF/K$  es abeliana si y solo si  $E/K$  y  $F/K$  son abelianas.

2. Exhibir dos subextensiones finitas  $E/\mathbb{Q}$  y  $F/\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$  tales que  $EF/\mathbb{Q}$  es de Galois pero ni  $E/\mathbb{Q}$  ni  $F/\mathbb{Q}$  lo son.

**Ejercicio 14.** Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  un polinomio irreducible con exactamente una raíz real y  $\text{gr}(f) \geq 2$ . Sea  $E$  el cuerpo de descomposición de  $f$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Probar que  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  no es abeliano.

**Ejercicio 15.** Sea  $E = \mathbb{C}(X)$  y sean  $f, g \in \text{Gal}(E/\mathbb{C})$  dados por  $f(X) = X^{-1}$  y  $g(X) = \xi_n X$ , donde  $\xi_n \in \mathbb{C}$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad. Probar que:

1.  $f^2 = g^n = \text{id}_E$  y  $fg = g^{-1}f$ .
2. El subgrupo  $H$  generado por  $f$  y  $g$  es isomorfo a  $D_n$ .
3.  $E^H = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$ .