

Algebra III

Práctica 2 - Extensiones de cuerpos, Polinomios minimales

2do cuatrimestre 2017

Nota: El polinomio minimal del elemento x sobre el cuerpo K se nota aquí $f(x, K)$, y ξ_n nota una raíz n -ésima primitiva de la unidad.

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión, y sea $x \in E$ algebraico sobre K . Dada una subextensión F/K de E/K , probar que $f(x, F)$ divide a $f(x, K)$. Dar ejemplos con $f(x, F) = f(x, K)$ y con $f(x, F) \neq f(x, K)$.

Ejercicio 2. Calcular los siguientes polinomios minimales:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$ | 3. $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$ | 5. $f(i, \mathbb{Q}[i])$ |
| 2. $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}])$ | 4. $f(i, \mathbb{Q})$ | 6. $f(w, \mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C}$ |

Ejercicio 3. Calcular:

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] : \mathbb{Q}]$ | 2. $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$ | 3. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{3}}] : \mathbb{Q}]$ |
|---|--|---|

Ejercicio 4.

1. Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$ y $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$. Deducir que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.
2. Hallar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}]$.

Ejercicio 5. Sea K un cuerpo y sea $E = K[a]$ una extensión finita de K . Para cada $\alpha \in E$ definimos $L_\alpha : E \rightarrow E$ la K -transformación lineal dada por $L_\alpha(x) = \alpha x$.

1. Probar que $f(a, K) = \chi_{L_\alpha} = \det(xI - L_\alpha)$.
2. ¿Para cuáles $\alpha \in E$ vale que $f(\alpha, K) = \chi_{L_\alpha}$?

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión. Probar que E/K es algebraica si y sólo si todo anillo A , con $K \subseteq A \subseteq E$, es un cuerpo.

Ejercicio 7. Sea $a \in \mathbb{Z}[i]$ irreducible y sea K el cuerpo primo de $\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle$. Calcular $[\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle : K]$.

Ejercicio 8. Probar que si E/K es una extensión finita tal que $[E : K]$ es primo, entonces no hay cuerpos intermedios entre E y K .

Ejercicio 9. Sea E/K una extensión algebraica y sea $a \in E$ tal que $[K[a] : K]$ es impar. Probar que $K[a] = K[a^2]$. Mostrar que eso no vale en general si $[K[a] : K]$ es par.

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ coprimo con 6 y sea F/\mathbb{Q} una extensión finita de grado n . Probar que $[F[\sqrt[3]{2}, i] : F] = 6$.

Ejercicio 11. Sea E/K una extensión finita y sean L_1 y L_2 subextensiones. Probar que:

1. Si $[L_1 : K]$ y $[L_2 : K]$ son coprimos, entonces $[L_1 L_2 : K] = [L_1 : K][L_2 : K]$.
2. Si $[L_1 L_2 : K] = [L_1 : K][L_2 : K]$ entonces $L_1 \cap L_2 = K$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 12. Mostrar que el polinomio $X^5 + 6X^3 + 15X^2 + 3$ es irreducible en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}][X]$.

Ejercicio 13.

1. Sea K un cuerpo con $\text{car}(K) \neq 2$. Sea E/K un extensión de grado 2. Probar que existe $a \in E$ tal que $E = K[a]$ y $a^2 \in K$.
2. Sea $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ y sea a una raíz de f en una clausura algebraica de \mathbb{Z}_2 . Probar que no existe $b \in \mathbb{Z}_2[a]$ tal que $f(b, \mathbb{Z}_2) = X^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 14. Dado $c \in \mathbb{Q}$, sea α_c una raíz del polinomio $X^2 + cX + c^2$. Describir las posibles extensiones $\mathbb{Q}[\alpha_c]$ de \mathbb{Q} y determinar $[\mathbb{Q}[\alpha_c] : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 15.

1. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular $f(\xi_p, \mathbb{Q})$ y deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p] : \mathbb{Q}]$.
2. Calcular $f(\xi_6, \mathbb{Q})$.

Ejercicio 16.

1. Probar que $f(\xi_5 + \xi_5^4, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$.
2. Deducir que $\mathbb{Q}[\xi_5]$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.
3. Calcular $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$.

Ejercicio 17. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.

1. Probar que $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.
2. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el menor cuerpo que contiene a todas las raíces de $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$.

Ejercicio 18. Sean $K = \mathbb{C}((X))$ y $L = \mathbb{C}((X^{1/2}))$. Probar que:

1. Si $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ entonces existe $v \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ tal que $u = v^2$.
2. Si $f \in K[Y]$ es de grado 2, entonces f tiene sus raíces en L .

Ejercicio 19. Sea $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C} : x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Probar que $\overline{\mathbb{Q}}$ es un cuerpo que es una extensión algebraica de \mathbb{Q} que no es finita, y que es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 20. Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio $f \in K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo. Sea $A = K[X_f : f \in K[X] \text{ irreducible}]$. Sea $I \subseteq A$ el ideal generado por $\{f(X_f) : f \in K[X] \text{ irreducible}\}$. Sea \mathcal{M} un ideal maximal de A que contiene a I y sea $L = A/\mathcal{M}$. Sea $E = \{x \in L : x \text{ es algebraico sobre } K\}$. Probar que E es un cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a K y que E/K es algebraica.

Ejercicio 22. Sean $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}]$.

1. Probar que $[E : \mathbb{Q}] = 2^n$.
2. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Calcular el grado de $\lambda_1\sqrt{p_1} + \lambda_2\sqrt{p_2} + \dots + \lambda_n\sqrt{p_n}$ sobre \mathbb{Q} .

3. Caracterizar las subextensiones de E/\mathbb{Q} .

Ejercicio 23. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de E/K de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si E/K es puramente trascendente?

Ejercicio 24.

1. Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.
2. Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K .
3. Deducir que para todo cardinal infinito a existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal a .

Ejercicio 25. Sea K un cuerpo.

1. Sea t trascendente sobre K . Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $f(t, K(t^n))$. Deducir $[K(t) : K(t^n)]$.
2. Sea $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y sean e_1, e_2, \dots, e_n números naturales. Calcular $[K(t_1, \dots, t_n) : K(t_1^{e_1}, \dots, t_n^{e_n})]$.

Ejercicio 26. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X] - K$. Probar que $[K(X) : K(f)] = \text{gr}(f)$.

Ejercicio 27. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x + y$ o $x \cdot y$ es trascendente sobre K .
2. Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x + y$ es trascendente sobre K .
3. Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x \cdot y$ es trascendente sobre K .
4. Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K .
5. Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K .

Ejercicio 28.

1. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{C}$ y que en cada caso $f(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]) \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ (de hecho, vale la igualdad).
2. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.
 - a) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}] \rightarrow \mathbb{C}$ pero, en general, $f(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]) \not\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]$.
 - b) Considerar $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}, \xi_3]$. ¿Qué sucede en este caso?