Álgebra I
Práctica 7 - Polinomios

<u>*Generalidades*</u>

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de $f \in \mathbb{Q}[X]$ en los casos

i) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$.
ii) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$.
iii) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$.

2. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos

i) $f = (X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ en $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
ii) $f = (X - 3\,i)^{133}$ en $\mathbb{C}[X]$.
iii) $f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$ en $\mathbb{Q}[X]$.
iv) $f = X^{10}(X^5 + 4)^7$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$.
ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$.
iii) $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$.
iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \mathrm{gr}(f) \cdot X^2 f$.

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$, $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
ii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4$, $g = 2X^3 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
iii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$, $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
iv) $f = X^5 + X^3 + X + 1$, $g = 2X^2 + 1$ en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
v) $f = X^n - 1$, $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$.
ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$.
iii) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in K[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in K[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.
Probar que

i) $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $K[X]$.
ii) Si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.
iii) Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
iv) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(h)$.
v) ¿Qué se obtiene al trabajar con los polinomios de $\mathbb{R}[X]$ módulo $X^2 + 1$?

7. Hallar el resto de la división de f por h para

i) $f = X^{353} - X - 1, \quad h = X^{31} - 2,$

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1, \quad h = X^{6} + 1,$

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1,$

en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

8. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $a \in K$. Probar que en $K[X]$ valen:

i) $X - a \mid X^n - a^n$.

ii) Si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$.

iii) Si n es par entonces $X + a \mid X^n - a^n$.

Calcular los cocientes en cada caso.

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1.$

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X.$

iii) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1.$

Evaluación y raíces

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$.

12. i) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente 1, $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{5}$.

ii) Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente 1, $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{5}$.

iii) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 4 cuyas raíces complejas son exactamente 1, $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{5}$.

13. Sean a, b y c las raíces complejas de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$.

i) Hallar

(a) $a + b + c$,

(b) $ab + ac + bc$,

(c) abc,

(d) $a^2 + b^2 + c^2$,

(e) $a^3 + b^3 + c^3$,

(f) $a^4 + b^4 + c^4$,

(g) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$,

(h) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$,

(i) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a + b$, $a + c$ y $b + c$.

14. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que

i) $f(1) = 3$, $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 3$ y $f(-1) = 1$.

ii) $f(2) = 0$, $f(-3) = \frac{1}{2}$, $f(3) = -1$ y $f(-2) = 1$.

15. i) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ y sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Probar que si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

ii) Probar que no existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(3) = 4$ y $f(-2) = 7$.

$*$ **16**. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 7$ con a, b, c, d enteros distintos.

Probar que $f(m) \neq 14$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

17. Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ tales que

i) f es mónico de grado 3 y $f(\sqrt{2}) = 5$.

ii) f es mónico de grado 3 y $f(1) = -f(-1)$.

18. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz séptima primitiva de la unidad. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$.

19. Hallar las raíces en $\mathbb{C}$ y factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 - 2X + 10$.

ii) $X^2 - 3 - 4\,i$.

iii) $X^2 + (1 + 2\,i)\,X + 2\,i$.

iv) $X^2 + (3 + 2\,i)\,X + 5 + i$.

20. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $X^6 + X^3 - 2$.

21. i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

22. Hallar todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que $X^3 f' = f^2$.

23. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1$.

ii) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2, \quad a = \frac{1}{2}$.

iii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i$.

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - (X-2)(X+7), \quad a = 2$.

v) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2$.

vi) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2$.

24. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene sólo raíces simples en $\mathbb{C}$.

25. Determinar los $a \in \mathbb{R}$ tales que $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple en $\mathbb{C}$.

26. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en $\mathbb{C}$. Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

27. i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

28. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.

29. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

30. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

31. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f_n'),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

32. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2 f_n',\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $\operatorname{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

33. i) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad k de f si y sólo si es raíz de multiplicidad $k-1$ de $(f : f')$.

ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que si f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, entonces tiene todas sus raíces (en $\mathbb{C}$) simples.

$*$ **34**. Sea f un polinomio de grado a lo sumo n tal que $f(i) = \dfrac{1}{i+1}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Hallar $f(n+1)$.

<u>*Factorización*</u>

35. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 8$.
ii) $X^4 + 3$.
iii) $X^7 - (-1 + i)$.
iv) $X^{11} - 2\,i\,(\sqrt{2} - \sqrt{6}\,i)^{-1}$.
v) $X^6 - (2 - 2i)^{12}$.
vi) $X^{12} + X^6 + 1$.

36. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^3 - 1$.
ii) $X^4 - 1$.
iii) $X^6 - 1$.
iv) $X^8 - 1$.

37. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 8$.
ii) $X^4 + 3$.
iii) $X^{12} + X^6 + 1$.

38. Probar que $(X^n - 1 : X^m - 1) = X^{(n:m)} - 1$.

39. Hallar todas las raíces racionales de

i) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$.
ii) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$.
iii) $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$.
iv) $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$.

40. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$:

i) $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$.
ii) $X^4 - 6X^2 + 1$.
iii) $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ sabiendo que $1 + 2\,i$ es raíz.
iv) $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$ sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz.
v) $X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple.
vi) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

vii) $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 13X^2 - 15X + 10$ sabiendo que una de sus raíces es una raíz sexta primitiva de la unidad.

41. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6.

42. i) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f.

ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1 + 2\sqrt{5}$ y a $3 - \sqrt{2}$ como raíces.

iii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional.

iv) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1 + \sqrt{2}) = 3$, $f(2 - \sqrt{3}) = 3$ y $f(1 + \sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$.

43. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

44. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a + 4)X^3 + (4a + 5)X^2 - (5a + 2)X + 2a$ tenga a a como raíz *doble*. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

45. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 2 es una raíz múltiple del polinomio

$$f = aX^5 + 8X^4 - 26X^3 + 44X^2 - 40X - (32a + 16).$$

Para cada valor de a hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

46. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad.

Para cada valor de $a \in \mathbb{Q}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

47. *(Lema de Gauss)* Sea p un número primo y $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio. Supongamos que todos los coeficientes de f son múltiplos de p y que $f(X) = f_1(X)f_2(X)$ con $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Probar que alguno de los factores f_1, f_2 tiene todos los coefficientes múltiplos de p.

Sugerencia: Considerar $\overline{f}, \overline{f_1}, \overline{f_2} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

$*$ **48**. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 7 tal que toma alguno de los valores 1 o -1 para 7 valores enteros diferentes de X. Probar que f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

49. Encontrar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(X - a)(X - 10) + 1$ sea reducible en $\mathbb{Z}[X]$.