FCEyN - UBA - 2do cuatrimestre 2017

# Álgebra I
# Práctica 6 - Números Complejos

**1**. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z^{-1})$, $\mathrm{Im}(z^{-1})$, $\mathrm{Re}(-i \cdot z)$ e $\mathrm{Im}(i \cdot z)$.

i) $z = (2+i)(1+3\,i)$

ii) $z = 5\,i(1+i)^4$

iii) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2(\overline{1-3\,i})$

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}\,i(1-i)^3$

v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^{179}$

vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{-1}$

vii) $z = \overline{1-3\,i}^{\,-1}$

**2**. Dados $z = 1+3\,i$ y $w = 4+2\,i$, representar en el plano complejo los siguientes números:

i) $z$

ii) $w$

iii) $z+w$

iv) $z-w$

v) $-z$

vi) $2z$

vii) $\frac{1}{2}w$

viii) $iz$

ix) $\overline{z}$

x) $\overline{3z+2w}$

xi) $\overline{iz}$

xii) $|z|$

xiii) $|2z|$

xiv) $|z+w|$

xv) $|z-w|$

xvi) $|\overline{w-z}|$

**3**. Graficar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

i) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 3\,\mathrm{Re}(z) - 1 = 2\,\mathrm{Im}(z)\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, -1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 2 \leq |z-1+i| \leq 3\}$

iv) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2| = |z-1-i|\}$

**4**. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

i) $z \neq 0$ y $z = \overline{z}^{\,-1}$

ii) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$

iii) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

iv) $|z|^2 = (z+\overline{z}) \cdot \mathrm{Im}(z)$

v) $|z - \overline{z}| = \mathrm{Re}(z)$

vi) $i(z^2+4) = z \cdot \mathrm{Im}(z)$

**5**. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos $z$:

i) $z = -36$

ii) $z = i$

iii) $z = -3-4i$

iv) $z = -15+8i$

**6**. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

i) $z \neq 0$ y $z - 1 = z^{-1}$

ii) $z^2 + (1+2i)z + 2i = 0$

**7**. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos:

i) $3+\sqrt{3}\,i$

ii) $(2+2\,i)(\sqrt{3}-i)$

iii) $(-1-i)^{-1}$

iv) $(-1+\sqrt{3}\,i)^5$

v) $(-1+\sqrt{3}\,i)^{-5}$

vi) $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}$

**8**. Graficar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \, / \, \arg(-i\,z) > \frac{\pi}{4}\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \, / \, |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$

**9**. i) Determinar la forma binomial de $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3}-i)^n = 2^{n-1}(-1+\sqrt{3}\,i)$.

**10**. Hallar en cada caso las raíces $n$-avas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8, \; n = 6$

ii) $z = -4, \; n = 3$

iii) $z = -1 + i, \; n = 7$

iv) $z = 2\,i\,(\sqrt{2} - \sqrt{6}\,i)^{-1}$, $n = 11$

v) $z = (2-2i)^{12}, \; n = 6$

vi) $z = 1, \; n = 8$

**11**. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

i) $z^4 = i\,\overline{z}^3$

ii) $z^6 = (2-2i)^{10}$

iii) $z^8 = \overline{z}^8$

iv) $z^{12} + z^6 + 1 = 0$

v) $(z+1)^4 = (z+i)^2$

vi) $(z^2+9)^4 = ((1+i)(z-3i))^4$

**12**. i) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

ii) Calcular $w + \overline{w} + (w+w^2)^2 - w^{38}(1-w^2)$ para cada $w \in G_7$.

iii) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.

**13**. Probar que $\displaystyle\prod_{w \in G_n} w = (-1)^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**14**. Determinar las raíces $n$-ésimas *primitivas* de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y $12$.

**15**. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que:

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$

ii) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$

**16**. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz $k$-ésima primitiva de la unidad. Hallar $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} w^{in}$ en función de $n \in \mathbb{N}$.

**17**. Dado un número primo $p$, probar que:

i) La suma de las raíces $p$-ésimas primitivas de la unidad es $-1$.

ii) La suma de las raíces $p^2$-ésimas primitivas de la unidad es $0$.

iii) Si $q$ es un número primo distinto de $p$, entonces la suma de las raíces $pq$-ésimas primitivas de la unidad es $1$.

**18**. ¿Cuánto da la suma de las raíces $n$-ésimas primitivas de la unidad si $n$ es un producto de primos distintos?

**19**. Sea $m \in \mathbb{Z}$ un entero par y $w \in \mathbb{C}$ una raíz $2m$-ésima primitiva de la unidad. Probar que $(w-1)^m$ es imaginario puro.

**20**. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz 23-ésima primitiva de la unidad. Hallar la parte real de $\sum_{k=1}^{11} w^{k^2}$.

**21**. Probar que si $w \in G_7$ entonces $\mathrm{Re}((w^{31}+1)(w^{18}-1)) = 0$.

**22**. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $z_n$ es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$.

**23**. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz $n$-ésima primitiva de la unidad si y solo si $\overline{w}$ lo es.

**24**. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

**25**. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz 35-ésima primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{cases} w^{15n} = w^5 \\ w^{14n} = w^{21} \end{cases}$$

**26**. Sea $G_{20}$ el conjunto de raíces 20-ésimas de la unidad y $G_4$ el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea $\sim$ la relación en $G_{20}$ definida por

$$a \sim b \iff a = wb \text{ para algún } w \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

ii) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

**27**. Probar que no es posible hallar tres puntos del plano con coordenadas enteras que sean los vértices de un triángulo equilátero.