FCEyN - UBA - 2do cuatrimestre 2017

Álgebra I
Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

<u>*Sumatoria*</u>

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria:

(a) $1+2+3+4+\ldots+100$

(b) $1+2+4+8+16+\ldots+1024$

(c) $1+(-4)+9+(-16)+25+\ldots+(-144)$

(d) $1+9+25+49+\ldots+441$

(e) $1+3+5+\ldots+(2n+1)$

(f) $n+2n+3n+\ldots+n^2$

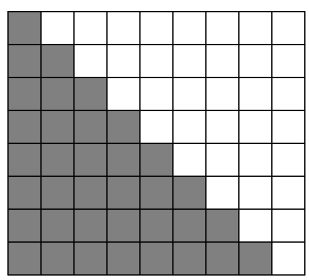
ii) Reescribir cada uno de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial:

(a) $5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 99\cdot 100$ (b) $1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot\ldots\cdot 1024$ (c) $n\cdot 2n\cdot 3n\cdot\ldots\cdot n^2$

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de cada una de las siguientes expresiones:

i) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$ ii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$ iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$ iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$ v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

3. i) Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del siguiente diagrama:



ii) Deducir que, para todo $n\in\mathbb{N}$, $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$.

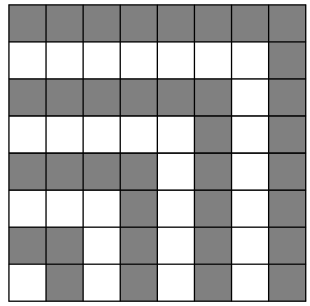
4. Calcular (en función de n) las siguientes sumas:

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1)$ ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$

<u>*Inducción*</u>

5. Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$:

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando el ejercicio 3,

iii) usando el principio de inducción.

6. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}\right)$. Deducir la fórmula de la suma geométrica: para todo $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

8. Sea $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Calcular las siguientes sumas:

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$ ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^{2i}$ iii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} q^i$ iv) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n-i)q^i$

9. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{-1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2n+1}$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$,

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$.

10. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$. (Sugerencia: $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$)

iii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$. (Sugerencia: calcular $\dfrac{1}{2i-1} - \dfrac{1}{2i+1}$)

iv) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!}$.

11. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

i) $n < 2^n$

ii) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

iii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

v) $n! \geq \dfrac{3^{n-1}}{2}$

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

vii) $\dbinom{2n}{n} < 4^n$

viii) $\dbinom{2n}{n} \geq \dfrac{2^{2n}}{2n}$

12. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

13. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}$, $\forall\, n \geq 5$,

ii) $3^n - 2^n > n^3$, $\forall\, n \geq 4$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5$, $\forall\, n \geq 3$,

iv) $\dbinom{2n}{n} > n\, 2^n$, $\forall\, n \geq 4$.

14. Probar que para todo $n \geq 3$ se tiene que

i) la cantidad de diagonales de un polígono convexo de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$,

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $(n-2)\pi$.

Recurrencia

15. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2\, n\, a_n + 2^{n+1} n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

iv) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = \dbinom{2n}{n}$.

16. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_1 = 3$, $\quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = n\, a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iv) $a_1 = 2$, $\quad a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

17. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (n+1)^3, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} n^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

(Sugerencia: usar los Ejercicios 10(i), 6 y 9.)

18. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n!, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^3$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular de otra manera $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ (c.f. Ej. 6).

19. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2(n+1)a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iv) $a_1 = -3, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

20. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

ii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

iii) $a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

iv) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

v) $a_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

vi) $a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

21. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\, a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n > n + \dfrac{1}{3}$ para todo $n \geq 4$.

22. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} i\, a_i, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\Big), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \ + (n+1), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

23. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\, a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Probar que $a_n \leq \frac{1}{2n}\binom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que $a_n > \frac{1}{3^{n-1}}\binom{2n}{n}$ para todo $n \geq 3$.

24. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la *sucesión de Fibonacci*, definida por

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n},$

ii) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1},$

iii) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,$

iv) $\begin{cases} F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \\ F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1}), \end{cases}$

v) $F_{n+m} = F_{m+1}F_n + F_{n-1}F_m \quad \forall m \geq 0,$

vi) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$

25. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hallar la cantidad de maneras de cubrir un tablero de $2 \times n$ usando n fichas de dominó, cada una de las cuales cubre exactamente dos casillas del tablero. (Las fichas se pueden colocar en posición horizontal o vertical.)

26. Probar que todo número natural n se puede escribir como suma de potencias de 2 distintas, incluyendo $2^0 = 1$. (Sugerencia: considerar la mayor potencia de 2 menor o igual que n.) Probar además, que dicha escritura es única.

27. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de Fibonacci. Probar que todo número natural m se puede escribir como suma de k números de Fibonacci

$$m = F_{n_1} + \ldots + F_{n_k}$$

para cierto $k \in \mathbb{N}$, con subíndices $n_1, \ldots, n_k$ mayores que 1 y $n_i + 1 < n_{i+1}$, $\forall i < k$. Es decir, todo número natural puede escribirse como suma de distintos términos no nulos de la sucesión de Fibonacci sin usar dos consecutivos. Probar además, que dicha escritura es única.

Problemas surtidos

28. Probar que para todo $n \geq 6$ es posible dividir un cuadrado en n cuadrados más pequeños.
Sugerencia: Probar que si vale para n, vale para $n+3$.

29. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

i) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$

ii) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$

Sugerencia: Intentar probar una desigualdad *más fuerte* por inducción.

30. Definimos la *media aritmética* de n números reales positivos $a_1, \ldots, a_n$ como

$$MA_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

y la *media geométrica* como

$$MG_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar la *desigualdad aritmético-geométrica* que afirma que

$$MG_n(a_1, \ldots, a_n) \leq MA_n(a_1, \ldots, a_n)$$

y la igualdad sólo se da cuando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

i) Probarla para $n = 2$, es decir $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ y si $\sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1+a_2}{2}$ entonces $a_1 = a_2$.
ii) Probar que si vale para n, también vale para $2n$.
iii) Probar que si vale para n, también vale para $n-1$.
iv) Concluir que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

31. Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Probar el *principio de inclusión-exclusión*, que afirma que

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{\#I+1} \#\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

donde la suma recorre todos los subconjuntos no vacíos de $1, \ldots, n$.