Análisis Numérico - TP 2 - Tema 1: **Ecuación de Poisson**

Segundo Cuatrimestre de 2017

1. El problema:

Considerar el problema de Poisson:
Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, se quiere hallar $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$-\Delta u = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \tag{1.1}$$

Físicamente f representa la densidad de carga eléctrica, mientras que la incógnita u es el potencial eléctrico. Nos interesa calcular tanto u como el campo eléctrico generado por la distribución de cargas f, que viene dado por $E : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$E = -\nabla u$$

El objetivo de este trabajo es implementar un algoritmo de elementos finitos para resolver este problema, en los dominios:

(a) $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$

(c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$

Para generar las mallas, recomendamos utilizar el mallador distmesh.

2. Datos

Dirichlet homogéneas: Resolver (1.1) con condiciones

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Estudiar los casos:

(1) *Fuente puntual:*

$$\int f(x,y)\varphi(x,y) = \varphi(0,0)$$

(2) *Dipolo:*

$$\int f(x,y)\varphi(x,y) = \varphi\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$$

(3) *Espira cargada:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0{,}24 \leq x^2 + y^2 \leq 0{,}25 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Dirichlet-Neumann: Resolver (1.1) con condiciones de contorno:

$$u\big|_{\Gamma} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0$$

Siendo Γ una parte del borde. Para los temas con dominios cuadriláteros Γ puede estar formado por dos lados. Para el dominio circular, tomar $\Gamma = \{(x,y) \in \partial\Omega : \; y > 0\}$

En todos los casos, graficar $E = -\nabla u$ utilizando el comando `quiver`.

3. Orden de Convergencia.

Considerar el problema en el disco unitario, con datos de tipo Dirichlet homogéneos y fuente puntual. En este caso, la solución exacta viene dada por:

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log(\sqrt{x^2+y^2}.)$$

Implementar un programa que calcule el error en L^2. Resolver para distintos valores de h y estudiar el orden de convergencia. ¿Es el órden esperado?

Repetir el experimento graduando la malla a través de la siguiente estrategia: dados los nodos de una malla uniforme: $\mathbf{x}_i$, reescalarlos tomando los nodos $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i\|\mathbf{x}_i\|^{\frac{1}{\mu}-1}$. Utilizar distintos valores del parámetro μ. Por ejemplo: 0,4, 0,6, 0,8. ¿Qué se obtiene?