

---

# ANÁLISIS NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2017

---

## Práctica N° 4: Elementos Finitos (Introducción).

**Notación:** Designaremos  $V^k = \{v : v \text{ es una función } C^{(k-1)}([0, 1]), \text{ con derivada } v^{(k)} \text{ continua a trozos y acotada en } [0, 1]\}$ , y  $V_0^k$  al subespacio de  $V^k$  de funciones que se anulan en el borde, más precisamente,  $V_0^k = \{v \in V^k : v(0) = v(1) = \dots = v^{(k-1)}(0) = v^{(k-1)}(1) = 0\}$ .

Notaremos  $\langle u, v \rangle = \int_0^1 uv dx$ .

Para una función dada  $f$ , llamaremos (D) al siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(V) será el problema variacional:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } \langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_0^1.$$

**Ejercicio 1** Probar que si  $w$  es continua en  $[0, 1]$  y  $\int_0^1 wv dx = 0 \quad \forall v \in V_0^1$ , entonces  $w(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ .

**Ejercicio 2** Probar que si  $u$  satisface el problema (V), y  $u''$  existe en el sentido habitual y es continua,  $u$  es también solución del problema (D).

**Ejercicio 3** Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con  $f$  una función prefijada en  $C(\bar{I})$ .

a) ¿Cómo definiría una solución débil?

b) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

**Ejercicio 4** Sean  $f$  una función prefijada en  $C(\bar{I})$ ,  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ . Realizar un análisis como el del ejercicio anterior para el problema no homogéneo:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

**Ejercicio 5** Sean  $f$  una función prefijada en  $C(\bar{I})$ . Realizar un análisis similar para el problema con condiciones de Neumann homogéneas:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{en } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 6** Probar que el espacio vectorial  $V$  de las poligonales con vértices en  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar  $(\phi, \psi) = \sum_0^n \phi(x_i)\psi(x_i)$ .

**Ejercicio 7** Considerar una partición uniforme del intervalo  $(0, 1)$ ,  $\bigcup_1^N I_i = (0, 1)$ . Construir el sistema lineal resultante, para las ecuaciones dadas en los Ejercicios 3, 5, al realizar aproximaciones de Galerkin con

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es lineal en cada } I_i\}$$

definiendo las condiciones de borde adecuadas en cada caso.

**Ejercicio 8** Para el espacio

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es cuadrática en cada } I_i\}$$

construir bases adecuadas y obtener la matriz de rigidez para el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 9** Encontrar la solución discreta correspondiente al problema variacional:

$$\text{hallar } u \in V_0^1(I) \text{ tal que } \langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_0^1(I)$$

utilizando discretizaciones con 2, 4, 8 y 16 elementos. Usar elementos lineales, y cuadráticos. En cada caso calcular las normas  $\|u - u_h\|_{L^\infty}$ ,  $\|u - u_h\|_{L^2}$ , y  $\|u' - u'_h\|_{L^2}$  (donde  $u$  es la solución clásica), y graficarlas en función de  $h$ . Para los casos:

- a)  $f = 1$ . ¿Qué sucede cuando se usan elementos cuadráticos?
- b)  $f = x$ .

**Ejercicio 10** Repetir el ejercicio anterior pero para el problema variacional correspondiente al ejercicio 3 con  $f(x) = e^x$ .

**Ejercicio 11** Definir

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \text{ tales que } \phi \text{ es cúbica en cada } I_i\}$$

y probar que en general  $V_h$  no está incluido en  $V^2$ . Pensar cómo definir un subespacio  $W_h \subset V_h$  tal que  $W_h \subset V_0^2$ . Construir las bases para  $W_h$ .

**Ejercicio 12** Considere el problema de contorno:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Aquí  $u$  representa, por ejemplo, la deflexión de una barra empotrada en sus extremos y sujeta a una fuerza transversal de intensidad  $f$ . Llevar el problema a la forma débil: Hallar  $u \in V_0^2(0, 1)$  tal que

$$\langle u'', v'' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_0^2(0, 1)$$

Discretice este problema utilizando el ejercicio anterior.