Práctica 6

Movimiento Browniano

1. Propiedades de trayectorias

1. Probar que un proceso $B = (B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$ si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

   - B tiene trayectorias continuas.
   - B es un proceso Gaussiano, i.e. todas sus distribuciones finito-dimensionales son normales multivariadas.
   - $\mathbb{E}(B_t) = \vec{0}$ para todo $t \geq 0$ y $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min\{s,t\} \cdot I_d$ para todo par $s, t \geq 0$.

2. Sea $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$. En todos los siguientes casos, mostrar que el proceso $W = (W_t)_{t\geq 0}$ es también un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$.

   i. $W_t := A \cdot B_t$ con $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ortogonal.
   ii. $W_t := \lambda B_{\lambda^2 t}$ con $\lambda \neq 0$.
   iii. $W_t := tB_{\frac{1}{t}}$ si $t \neq 0$ y $W_0 = 0$.
   Sugerencia. Para probar la continuidad de W en $t = 0$ para este último caso, recurrir al ejercicio anterior.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación:

- $\mathfrak{C}$ denotará la clase de borelianos en $C(\mathbb{R}_{\geq 0})$.
- $B = (B_t)_{t\geq 0}$ será un movimiento Browniano en $\mathbb{R}$.
- P_B será la medida de Wiener inducida por B en $(C(\mathbb{R}_{\geq 0}), \mathfrak{C})$.

Definición. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq}0 \to \mathbb{R}$ una función y $\gamma \in [0,1]$. Decimos que:

- f es *γ-Hölder en t* si existen $C_{t,\gamma}, \delta_{t,\gamma} > 0$ tales que si $|s-t| < \delta_{t,\gamma}$ entonces
$$|f(s) - f(t)| \leq C_{t,\gamma}|s-t|^{\gamma}.$$
- f es *γ-Hölder en* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ si existe $C_{a,b,\gamma} > 0$ tal que si $s, t \in [a,b]$ entonces
$$|f(s) - f(t)| \leq C_{a,b,\gamma}|s-t|^{\gamma}.$$
- f es *localmente γ-Hölder* si es γ-Hölder en $[0,T]$ para cualquier $T > 0$.

Denotaremos respectivamente por $\mathcal{H}_\gamma(t)$, $\mathcal{H}_\gamma([a,b])$ y $\mathcal{H}_\gamma$ a la clase de dichas funciones. Notar que los tres conjuntos pertenecen a $\mathfrak{C}$. ¿Por qué?

3. a) Dado $T > 0$ sea para cada $n \in \mathbb{N}$ una partición del intervalo $[0, T]$
$$P^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = T\}.$$
Probar que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale
$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{k_n}(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 - T\right)^2\right) \leq CT\|P^{(n)}\|$$
y deducir que si $\|P^{(n)}\| \to 0$ cuando $n \to +\infty$ entonces
$$\sum_{i=1}^{k_n}(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 \xrightarrow{L^2} T.$$
b) Mostrar que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|P^{(n)}\| < +\infty$ entonces $\sum_{i=1}^{k_n}(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 \xrightarrow{cs} T$.
c) Deducir que casi seguramente B no es localmente γ-Hölder para ningún $\gamma > \frac{1}{2}$, i.e.
$$P_B\left(\bigcup_{\gamma > \frac{1}{2}} \mathcal{H}_\gamma\right) = 0.$$
Mostrar que, de hecho, casi seguramente no existe ningún intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ en donde B sea γ-Hölder en $[a, b]$ para algún $\gamma > \frac{1}{2}$.

4. Probar que casi seguramente se tiene que
$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \liminf_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$
Deducir que $P_B(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(t)) = 0$ para todo $t \geq 0$.
En realidad, vale que $P_B\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(t)\right) = 1$ (B. Davis, 1983). Interpretar este resultado.

5. Probar que $P(\max_{0\leq s\leq t} B_s$ se alcanza en un único punto$) = 1$ para todo $t \geq 0$. Deducir que casi seguramente cada valor extremo de B se alcanza una única vez.

6. Sea $x > 0$ y sea $T_x^+ = \inf\{t > 0 : B_t = x\}$. Probar que la variable aleatoria T_x^+ tiene la misma distribución que $(\frac{x}{B_1})^2$. Verificar que $\mathbb{E}(T_x^+) = +\infty$.

2. Comportamiento asintótico

1. Sea $\mathcal{G}_\infty^B = \bigcap_{t\geq 0} \sigma(B_s : s \geq t)$ la σ-álgebra cola de B. Probar que $\mathcal{G}_\infty^B$ es trivial, i.e. para todo $A \in \mathcal{G}_\infty^B$ se tiene $P(B \in A) \in \{0, 1\}$.

2. Probar que casi seguramente se tiene que
$$\limsup_{t\to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \liminf_{t\to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

3. Probar que B es *puntualmente recurrente*, i.e.
$$P(B^{-1}(\{x\}) \text{ es no acotado para todo } x \in \mathbb{R}) = 1.$$

3. Ceros del movimiento Browniano

Sea $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 : B_t = 0\}$ el conjunto de ceros de B.

1. Probar que $\mathcal{Z}$ es cerrado y casi seguramente no acotado.

2. Probar que casi seguramente $\mathcal{Z}$ tiene medida de Lebesgue nula.[1]

   Sugerencia. Calcular $\mathbb{E}(|\mathcal{Z}|)$ utilizando el Teorema de Fubini-Tonelli.

3. *a*) Para $t \geq 0$ sean los tiempos de parada

   $$R_t^{(1)} = \text{ínf}\{u \geq t : B_u = 0\} \qquad \text{y} \qquad R_t^{(2)} = \text{ínf}\{u > R_t^{(1)} : B_u = 0\}.$$

   Probar que $P(R_t^{(2)} = R_t^{(1)}) = 1$.

   b) Concluir que, salvo quizás por un evento de probabilidad nula, $\mathcal{Z}$ es perfecto, i.e. no tiene puntos aislados. Recordar que en tal caso $\mathcal{Z}$ resulta no numerable.

4. Sea $t \geq 0$. Probar que, casi seguramente, el movimiento Browniano en una dimensión no es diferenciable en t. [En realidad, vale algo más fuerte (Paley, Wiegner y Zygmund, 1933): Casi seguramente, el movimiento Browniano en una dimensión no es diferenciable en ningún lado].

[1] ¿Es cierto que $|\mathcal{Z}|$ es una variable aleatoria? Va a necesitar responder esto para resolver el ejercicio. Para ello, use que $(t,\omega) \mapsto B_t(\omega)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$-medible. ¿Cómo demostraría esto último?