Práctica 5

Convergencia de medidas

A lo largo de esta Práctica fijaremos un espacio métrico (S, d).

Definición. Sea S un espacio métrico. Decimos que:

- S es *localmente compacto* si para cada $x \in S$ y $r > 0$ existe un compacto K tal que
$$x \in K \subseteq B(x, r).$$
- S es *σ-compacto* si es la unión numerable de conjuntos compactos.

Por otro lado, definimos los espacios:

$$C_b(S) := \{f : S \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada}\}$$

y
$$C_c(S) := \{f : S \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y de soporte compacto}\},$$
y utilizaremos la notación $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Por último, dada una probabilidad P sobre $(S, \mathcal{B}(S))$ y $f \in C_b(S)$ introducimos la notación
$$P(f) := \int_S f(x) dP(x).$$

1. Sea $\mathcal{F} \subseteq C_b(S)$ una clase de funciones densa en $C_b(S)$ con la métrica uniforme. Probar que $\mathcal{F}$ caracteriza medida, i.e. si P y Q son probabilidades sobre $(S, \mathcal{B}(S))$ entonces
$$P(f) = Q(f) \text{ para toda } f \in \mathcal{F} \Longrightarrow Q = P.$$

2. Probar que $C_c(S)$ caracteriza medida si S es localmente compacto y separable.

3. Decimos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en *variación total* a P_∞, y lo notamos $P_n \xrightarrow{TV} P_\infty$, si
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{B\in\mathcal{B}(S)} |P_n(B) - P_\infty(B)| = 0.$$
Probar que si $P_n \xrightarrow{TV} P_\infty$ entonces $P_n \xrightarrow{w} P_\infty$. ¿Vale el recíproco?

4. Probar que si S es discreto y numerable entonces
$$P_n \xrightarrow{w} P_\infty \Longleftrightarrow P_n(\{x\}) \to P_\infty(\{x\}) \text{ para todo } x \in S.$$
Mostrar que en tal caso se tiene en realidad la equivalencia
$$P_n \xrightarrow{w} P_\infty \Longleftrightarrow P_n \xrightarrow{TV} P_\infty.$$

5. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ sea X_n una variable aleatoria continua con densidad f_n.

   a) Probar que si $f_n \xrightarrow{as} f_\infty$ entonces $P_{X_n} \xrightarrow{TV} P_{X_\infty}$.

   b) Mostrar que la recíproca no es necesariamente cierta.

6. Sean S y S' espacios métricos, $f : S \to S'$ una función continua entre ellos y $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una familia de medidas de probabilidad sobre $(S, \mathcal{B}(S))$. Probar que

$$P_n \xrightarrow{w} P_\infty \Longrightarrow P_n \circ f^{-1} \xrightarrow{w} P_\infty \circ f^{-1}.$$

7. Probar que una sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}$ es tight si y sólo si para la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de distribución asociadas se verifica

$$\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} F_n(x) = 1$$

   uniformemente en $n \in \mathbb{N}$.

8. Probar que una familia $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ de variables aleatorias en $\mathbb{R}$ con distribución normal es tight si y sólo si las respectivas familias de medias y varianzas están acotadas.

9. Probar que una familia $(P_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ de probabilidades sobre un espacio producto $S \times S'$ es tight si y sólo si ambas familias de marginales lo son.[1]

10. Probar que $C_c(S)$ caracteriza convergencia si S es localmente compacto y separable, i.e.

$$P_n(f) \to P_\infty(f) \text{ para toda } f \in C_c(S) \Longrightarrow P_n \xrightarrow{w} P_\infty.$$

11. Sean $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida inductivamente como $X_1 \equiv 1$ y para $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1} = \begin{cases} \frac{X_n}{2} & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ \\ \frac{X_n}{2} + Y_{n+1} & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

    Hallar el límite en distribución de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[1] Notar que aquí las medidas P_α no son necesariamente una medida producto.