# Práctica 2
# Esperanza condicional

1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una $\sigma$-álgebra contenida en $\mathcal{F}$ tal que $P(B) \in \{0, 1\}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

   *a*) Caracterizar las variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles.

   *b*) Calcular $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier variable aleatoria $X$ integrable.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una partición de $\Omega$. Consideremos la $\sigma$-álgebra generada por la partición $\mathcal{G} = \sigma(A_n : n \in \mathbb{N})$.

   *a*) Caracterizar los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{G}$.

   *b*) Caracterizar las variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles.

   *c*) Deducir una expresión explícita para $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier variable aleatoria $X$ integrable.

   *d*) Concluir que la expresión encontrada en el ítem anterior caracteriza $\mathbb{E}(X|Y)$ para toda $Y$ variable aleatoria discreta. Observar que, en este caso, $\mathbb{E}(X|Y)$ también resulta una variable aleatoria discreta.

3. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una $\sigma$-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias definidas sobre este espacio tales que $Y$ es $\mathcal{G}$-medible y $X$ es independiente de $\mathcal{G}$. Probar que para toda $f$ función medible Borel no negativa

$$\mathbb{E}(f(X,Y)|\mathcal{G}) = \int_{\Omega_1} f(x,Y)\, dP_X(x).$$[1]

4. **¿Es la esperanza condicional una propiedad distribucional?**

   Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una cierta $\sigma$-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. ¿Es cierto que si dos variables aleatorias $X$ e $Y$ definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$ tienen la misma distribución entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ y $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ tienen también la misma distribución?

5. Una familia $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ de variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice *intercambiable* si para toda elección de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ distintos la distribución del vector aleatorio $X = (X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n})$ coincide con la de $X_\sigma = (X_{\alpha_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{\alpha_{\sigma(n)}})$ para cualquier permutación de índices $\sigma$.

   *a*) Probar que si $X$ es una variable aleatoria simétrica respecto del origen entonces el vector $(X, -X)$ es intercambiable.

   *b*) Probar que toda familia de variables aleatorias i.i.d. es intercambiable.

---

[1] Notar que, en el caso $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, esto justifica el razonamiento intuitivo

$$\text{“ } \mathbb{E}(f(X,Y)|Y=y) = \mathbb{E}(f(X,y)|Y=y) = \mathbb{E}(f(X,y)) \text{ ”}$$

si $X$ e $Y$ son independientes.

*c*) Probar que si el vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ es intercambiable y $X_1$ es integrable entonces para todo $1 \leq i \leq n$ vale

$$\mathbb{E}\Big(X_1 \Big| \sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \mathbb{E}\Big(X_i \Big| \sum_{i=1}^{n} X_i\Big).$$

Deducir una expresión explícita para $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{i=1}^{n} X_i)$. Interpretar.

# Independencia condicional

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una cierta $\sigma$-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Dos variables aleatorias $X$ e $Y$ definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ se dicen *independientes dada* $\mathcal{G}$ si para todo par de funciones medibles Borel no negativas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se verifica

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

1. ¿Cuándo son dos variables aleatorias $X$ e $Y$ independientes dada la $\sigma$-álgebra trivial? ¿Y dada $\mathcal{F}$?

2. *a*) Mostrar que $X$ e $Y$ son independientes dada una cierta $\sigma$-álgebra $\mathcal{G}$ si y sólo si para cualquier par $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de funciones medibles Borel no negativas y toda variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible $Z$ no negativa se verifica

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}(f(X)Z\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})).$$

   *b*) Mostrar que $X$ e $Y$ son independientes dada una cierta $\sigma$-álgebra $\mathcal{G}$ si y sólo si para toda función medible Borel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa vale que

$$\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)) = \mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

   ¿Qué nos dice esto para el caso en que $\mathcal{G}$ es la $\sigma$-álgebra trivial?

# Aplicaciones

1. Sean $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas y $N$ otra variable aleatoria tomando valores en $\mathbb{N}$ e independiente de la sucesión $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Probar que si $X_1$ es integrable y $\mathbb{E}(N) < +\infty$ entonces

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

   es una variable aleatoria integrable y calcular su esperanza.

2. *a*) Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Bernoulli de parámetro $p$. Probar que $X := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$ tiene distribución $\mathcal{G}(p)$.

   *b*) Sea $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Calcular $\mathbb{E}(Y)$ usando técnicas de esperanza condicional.

3. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. uniformes en el intervalo $[0,1]$. Calcular la esperanza de la variable aleatoria $N := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} U_i \geq 1\}$.

4. A una fiesta concurren $N$ personas, cada una con un sombrero. Al ingresar a la fiesta cada persona deja su sombrero en una caja grande situada en la entrada del salón. Cuando finaliza el evento, las $N$ personas se dirigen a la entrada del salón y extraen un sombrero al azar de la caja. Aquellas personas que sacan su propio sombrero se retiran de la fiesta. El resto vuelve a colocar los sombreros que extrajeron en la caja y luego cada uno de los todavía presentes extrae nuevamente un sombrero al azar. Este procedimiento se repite hasta que las $N$ personas se hayan retirado de la fiesta. Calcular la esperanza de $R_N$, la cantidad de extracciones que fueron necesarias hasta conseguir que las $N$ personas se retiraran de la fiesta con su sombrero.

# Probabilidad condicional regular

1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X$ e $Y$ dos variables aleatorias discretas definidas en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ con función de probabilidad puntual conjunta $p_{XY}$. Fijada una medida de probabilidad $P_0$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, demostrar que la aplicación $Q : \mathbb{R} \times \sigma(X,Y) \to [0,1]$ definida para cada $B \in \sigma_\Pi(\mathbb{R}^2)$ por la fórmula

$$Q(y, \{(X,Y) \in B\}) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{x\in\mathcal{A}_X:(x,y)\in B} p_{XY}(x,y)}{\sum_{x\in\mathcal{A}_X} p_{XY}(x,y)} & \text{si } y \in \mathcal{A}_Y \\ \\ P_0((X,Y)\in B) & \text{si } y \notin \mathcal{A}_Y \end{cases}$$

es una probabilidad condicional regular para $\sigma(X,Y)$ dada $Y$.

2. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ medible Borel no negativa y $(X,Y)$ vector aleatorio discreto. Deducir del ejercicio anterior una expresión explícita para $\mathbb{E}(f(X,Y)|Y)$.

3. **(Teorema de desintegración)**. Sea $\mu$ una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ con distribución marginal $\alpha$ para la primera coordenada, i.e. para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\mu(B \times \mathbb{R}) = \alpha(B).$$

Entonces existe una función $Q : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to [0,1]$ tal que

*a*) Para cada $x \in \mathbb{R}$ la aplicación $Q(x,\cdot)$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

*b*) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $Q(x, \{x\} \times \mathbb{R}) = 1$.

*c*) Para toda $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ medible Borel $\mu$-integrable se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) Q(x', d(x,y)) \right) d\alpha(x').$$

La función $Q$ se dice una *desintegración de la medida de probabilidad* $\mu$ *respecto de su marginal* $\alpha$. Dicha función es única en el siguiente sentido: si $Q'$ es otra función con estas características entonces existe $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con $\alpha(N) = 0$ tal que

$$Q(x, B) = Q'(x, B).$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ e $x \in \mathbb{R} - N$.