Ejercicios para entregar - Movimiento Browniano

En los siguientes ejercicios, $(B_t)_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano estándar en una dimensión.

1. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $T_x = \text{ínf}\{t \geq 0 : B_t = x\}$.

    a) Probar que $P(T_x < +\infty) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

    b) Probar que $P(T_x \leq t) = P(|B_t| \geq |x|) = 2 - 2F_{B_1}(\frac{|x|}{\sqrt{t}})$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$.

    c) Calcular f_{T_x} para cada $x \in \mathbb{R}$ y verificar que $\mathbb{E}(T_x) = +\infty$.

2. Probar que si $-y < 0 < x$ entonces $P(T_{-y} < T_x) = \frac{x}{x+y}$.

    Sugerencia. Probar que $(B_t)_{t\geq 0}$ es una martingala.

3. Probar que si $-y < 0 < x$ entonces $\mathbb{E}(T_{-y} \wedge T_x) = xy$.

    Sugerencia. Probar que $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es una martingala.

4. Sean $L := \sup\{t \in [0,1] : B_t = 0\}$ y $R := \text{ínf}\{t \geq 1 : B_t = 0\}$.

    a) ¿Es L un tiempo de parada? Probar que $L \sim \frac{1}{R}$.

    b) Utilizar la propiedad de Markov para probar que la función de densidad de R verifica
    $$f_R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} f_{T_x}(t-1)dx.$$

    c) Deducir la distribución de L. Ésta se conoce como la *ley del arcoseno*.