Apéndice I

Construcción de medidas

1. Teorema de extensión de Caratheodory-Hahn

Definición. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{S}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{S}$ es una *semiálgebra* sobre Ω si verifica las siguientes condiciones:

(a) $\emptyset \in \mathcal{S}$ y $\Omega \in \mathcal{S}$

(b) $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$

(c) $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow A^c = \bigcup_{i=1}^n A_i$ con $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ disjuntos.

Definición. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{M}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{M}$ es una *clase monótona* sobre Ω si verifica las siguientes condiciones:

(a) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

(b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

1. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{S}$ una semiálgebra sobre Ω. Probar que la clase
$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ A \in \Omega : A = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ con } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos} \right\}$$
es un álgebra de subconjuntos de Ω.

2. **Teorema(Caratheodory-Hahn)**. Sea μ una medida sobre una semiálgebra $\mathcal{S}$. Entonces μ admite una extensión a $\sigma(\mathcal{S})$, la σ-álgebra generada por $\mathcal{S}$.

3. a) Probar que en el Teorema de Caratheodory-Hahn la extensión resulta única si la medida μ es σ-finita sobre $\mathcal{S}$.
   b) Mostrar con un ejemplo que la extensión puede no ser única si μ no es σ-finita. *Sugerencia*. Considere $\mathcal{S} = \{(a, b] : -\infty \leq a < b \leq +\infty\}$ y la medida μ sobre $\mathcal{S}$ dada por
$$\mu(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = \emptyset \\ \\ +\infty & \text{si } I \neq \emptyset. \end{cases}$$

4. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{A}$ una clase de subconjuntos de Ω.
   a) Mostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, siendo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la clase monótona generada por $\mathcal{A}$.
   b) **Teorema de la clase monótona**. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra entonces $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

5. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{S}$ una semiálgebra sobre Ω. Probar que si dos medidas finitas definidas sobre $\sigma(\mathcal{S})$ coinciden en $\mathcal{S}$ entonces son iguales.

2. Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{P}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{P}$ es un π-*sistema* si es cerrada por intersecciones finitas.

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{D}$ es un λ-*sistema* si verifica las siguientes condiciones:

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$

(b) $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{D}$

(c) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ y $A_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

1. Verificar que la condición (b) en la definición de λ-sistema puede ser sustituida por la condición

$$(b') \;\; A, B \in \mathcal{D} \text{ y } A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

2. Probar que toda clase $\mathcal{C}$ que sea π-sistema y λ-sistema a la vez resulta una σ-álgebra.

3. **Teorema(Dynkin)**. Sean $\mathcal{P}$ un π-sistema y $\mathcal{D}$ un λ-sistema que satisfacen $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$. Entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{D}$.

4. Sean μ y ν dos medidas finitas definidas sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

   $a)$ Probar que si μ y μ coinciden sobre un π-sistema $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}$ que contiene a Ω entonces también coinciden sobre $\sigma(\mathcal{P})$.

   $b)$ Mostrar que μ y ν podrían no coincidir sobre $\sigma(\mathcal{P})$ si $\mathcal{P}$ no contiene a Ω.