1. Sea $(X_1, X_2, \dots)$ un proceso de Bernoulli de parámetro p.

   a) Calcular la probabilidad de que haya menos de 5 éxitos entre los ensayos $27 \leq i \leq 47$.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer éxito haya ocurrido antes del ensayo 13?

   c) ¿Cuál es la probabilidad que la tira de 15 dígitos 100010100110001 aparezca en los ensayos $101 \leq i \leq 115$?

2. Sea $Y_i =$ instante del i-ésimo éxito. Calcule la probabilidad $P(Y_i = k)$.

3. Sea $R_t = \text{mín}\{i \geq 0 : X_{t+1} = 1\}$. Calcule $P(R_t = k \mid R_{t-1} = h)$.

4. **Desarrollo binario.** Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega = [0,1), \mathcal{B}[0,1), P)$ con P la probabilidad uniforme. Para cada $x \in [0,1)$, consideramos el desarrollo binario $0, x_1x_2x_3\dots$, tomando el desarrollo que contiene una cantidad infinita de 0's. (Recordar Ejercicio 9, Práctica 10.)

   Definimos $X_n(x) = x_n$.

   a) Calcular la probabilidad del evento $\{x : X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n\}$ con $s_i \in \{0,1\}$. ¿Qué intervalo representa?

   b) Escribir el evento $\{X_2 = 1\}$ como unión de intervalos.

   c) Probar que X_i es una variable aleatoria Bernoulli y hallar el parámetro p.

   d) Dados $I, J \subset \mathbb{N}$, se define $A_{I,J} = \{x \in [0,1) : x_i = 1 \text{ si } i \in I; x_j = 0 \text{ si } j \in J\}$. Calcular la probabilidad de $A_{I,J}$ en función de los cardinales $\mid I \mid, \mid J \mid$.

5. En las condiciones del ejercicio anterior, sea $S_n(x) = \#\{i : x_i = 1, 1 \leq i \leq n\}$. Sea $\bar{X}_n = S_n/n$. Definimos $pa(x) =$ *proporción asintótica* de 1's en x como el límite de $\bar{X}_n(x)$ cuando $n \to \infty$, si el límite existe.

   a) Hallar la probabilidad de $\{x : x \text{ tiene una cantidad finita de 0's en el desarrollo binario}\}$

   b) Calcular $P(x : pa(x) = 1/2)$.

   c) Calcular $P(x : pa(x) = 1/3)$.

6. Dadas $X_i^l \sim \mathit{Bernoulli}(\lambda/l)$ con $i \in \mathbb{N}$, sea el proceso binomial rescalado $(S_t^l, t \geq 0)$ definido por $S_t^l := \sum_{i: i \leq lt} X_i^l$.

   a) Demostrar que los incrementos S_t^l convergen en distribución a los incrementos de un proceso de Poisson:
   $$S_{t+h}^l - S_t^l \xrightarrow{dist} N_{t+h} - N_t$$

   b) Sean Y_i^l los instantes de crecimiento de S_t^l:
   $$Y_i^l := \text{mín}\{t > Y_{i-1}^l : S_t^l - S_{t-1}^l = 1\}$$
   Usando que lY_i^l tiene distribución binomial negativa, demostrar que Y_i^l converge en distribución a una Gama(i, λ).

7. Definimos el proceso de tiempos entre llegadas $(T_i^l : i \geq 0)$ por
   $$T_i^l := Y_i^l - Y_{i-1}^l$$

   a) Demostrar que T_i^l son iid con distribución $P(T_i^l > t) = (1 - \lambda/l)^{tl}$. Concluir que los tiempos entre llegadas de un proceso de Poisson son iid exponenciales λ.

   b) Demostrar que si T_i iid exponenciales(λ), entonces $Y_j = \sum_{i=1}^{j} T_i$ tiene distribución Gama(j, λ).

   c) Sea
   $$N_t := \text{máx}\{n \geq 0 : Y_n < t\}.$$
   Probar que $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.