Probabilidad y Estadística - Ejercicio

Sean $X_1 \dots X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad

$$f(x,\theta) = \frac{64}{(x-\theta)^4} I_{\{\theta+2,\infty\}}$$

donde θ es un parámetro desconocido.

Probar que el estimador de máxima verosimilitud de θ está dado por $\hat{\theta}_{MV} = minX_i - 2$

Solución:

Planteemos la función de verosimilutud y busquemos el θ que la maximiza

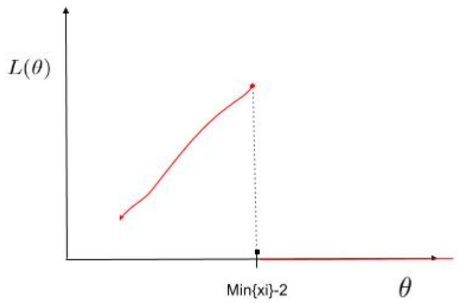
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{64}{(x_i-\theta)^5} I_{\{\theta+2,\infty\}}$$

Notemos entonces que si alguna de las x_i está fuera del intervalo $[\theta+2,\infty]$ la función de verosimilitud vale cero. Sino vale la productoria, es decir

$$L(\theta) = \begin{cases} 0 & x_i \leq \theta + 2 \quad para \quad algun \quad i \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{64}{(x_i-\theta)^5} & sino \end{cases}$$

¡¡La función de verosimilitud es una función en θ !!.

Pensemos a las x_i como fijas entonces tenemos que $\prod_{i=1}^{n} \frac{64}{(x_i-\theta)^5}$ es positiva con las $x_i > \theta + 2$, y es una función creciente en θ. Entonces el máximo se alcanzará cuando $x_i > \theta + 2$ $\forall i$, es decir cuando $min\{x_i\} > \theta + 2$, es decir cuando $\theta < min\{x_i\} - 2$ Dibujemos entonces como nos quedaría $L(\theta)$



Entonces el máximo de la función se alcanza en $\theta = min\{x_i\} - 2 \Longrightarrow \hat{\theta}_{MV} = min\{x_i\} - 2$