Práctica 8
Transformadas de Fourier y Laplace

Notaciones y definiciones

- $\star$ $G(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;/\; f$ es continua a trozos, con derivadas laterales finitas en todo punto y absolutamente integrable en $\mathbb{R}\}$
- $\star$ $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\, dt \quad f \in G(\mathbb{R})$
- $\star$ $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\, dt \quad f, g \in G(\mathbb{R})$

Transformada de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones de L^1

   a) $e^{-|x|}$ **b)** $\dfrac{1}{1+x^2}$ **c)** e^{-ax^2}

   d) $\begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $(a > 0)$ **e)** $\begin{cases} 0 & |x| > A \\ 1 & |x| < A \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 1 & 0 \leq x < a \\ 0 & x \notin [0, a) \end{cases}$

2. Sean $f, g \in G(\mathbb{R})$. Probar las siguientes propiedades de la convolución:

   a) $f * g = g * f$

   b) $f * (g * h) = (f * g) * h$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)\, dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt\right)$

3. Sea $f \in G(\mathbb{R})$. Probar:

   a) $g(x) = e^{iax}f(x) \;\Rightarrow\; g \in L^1$ y $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-a)$

   b) $g(x) = f(x+a) \;\Rightarrow\; g \in L^1$ y $\hat{g}(t) = e^{iat}\hat{f}(t)$

   c) $g \in G(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$

   d) $g(x) = \overline{f(-x)} \;\Rightarrow\; \hat{g} = \overline{\hat{f}}$

   e) $g(x) = f(\frac{x}{a}),\;\; a > 0 \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = a\,\hat{f}(at)$

   f) $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L^1 \;\Rightarrow\; \hat{f}$ es derivable y $\hat{f}' = \hat{g}$

g) $f^{(n)} \in C^n \;\Rightarrow \widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n \hat{f}(t)$

h) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \;\Rightarrow\;$ $\mathrm{Re}(\hat{f})$ es par e $\mathrm{Im}(\hat{f})$ es impar.

i) $g(x) = f(ax+b), \quad a \neq 0 \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ibt}{a}} \hat{f}(\frac{t}{a})$

j) $g(x) = f(x)\cos(ax) \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \dfrac{\hat{f}(t+a) + \hat{f}(t-a)}{2}$

k) $g(x) = f(x)\,\mathrm{sen}(ax) \;\Rightarrow\; \hat{g}(t) = \dfrac{\hat{f}(t-a) - \hat{f}(t+a)}{2i}$

l) f continua y $\hat{f} \in G(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

   a) Comprobar que $\hat{f}(t) = 2\,\dfrac{\mathrm{sen}\, t}{t}$.

   b) Verificar que:

   i) $h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [c,d] \\ 0 & x \notin [c,d] \end{cases} = f\left(\dfrac{2}{d-c}x + \dfrac{d+c}{d-c}\right)$

   ii) $k(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}\, x & x \in [0,\pi] \\ 0 & x \notin [0,\pi] \end{cases} = \mathrm{sen}\, x\, f\left(\dfrac{2}{\pi}x - 1\right)$

   c) Calcular $\hat{h}$ y $\hat{k}$ usando el ejercicio 3.

5. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^1.

   a) $e^{-a(x-b)^2}$ $(a > 0, b \in \mathbb{R})$ **b)** $e^{-x^2}\,\mathrm{sen}(ax)$ **c)** $\dfrac{1}{x^2+a^2}$

6. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^2.

   a) $\dfrac{x}{x^2+1}$ **b)** $\dfrac{\mathrm{sen}\, x}{x}$ **c)** $\dfrac{x^3}{1+x^4}$

   d) $\dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}$ **e)** $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ **f)** $\dfrac{\mathrm{sen}(ax)}{x}$ $(a > 0)$

- Sean $f, g \in L^2$, continuas a trozos. Se tienen las siguientes propiedades:

  a) $f \pm g,\; f \pm ig \in L^2$.

  b) **i)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm \hat{g}|^2\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm g|^2\, dt$

  ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm i\hat{g}|^2\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm ig|^2\, dt$

c) Identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}\ dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\ dt$$

7. Usando la identidad de Parseval, calcular las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1-e^{-ita}}{it}\right|^2 dt,\ (a>0)$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(at)\ \operatorname{sen}(bt)}{t^2}\, dt$

8. Hallar las transformadas inversas de Fourier de:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(au)}{u}$ b) $\dfrac{1-\cos(au)}{u}$ c) e^{-u^2} d) $\dfrac{u}{u^2+1}$

9. a) Hallar la transformada inversa de Fourier de: $g(u) = \dfrac{1}{(u^2+1)^2}$ interpretándola como la transformada de una convolución.

b) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} g(y)\, dy$, en función de $\hat{g}$.

- **Regla de Leibniz**

Sea $\varphi : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{C}$ continua y $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ dada por $g(t) = \displaystyle\int_a^b \varphi(s,t)ds$. Entonces:

a) g es continua.

b) Si $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$ entonces g es C^1 y $g'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)ds$

10. Resolver transformando Fourier en la variable x

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u(x,0) = e^{-x^2}$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u(x,0) = e^{-x^2}$

c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = u \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u(x,0) = 6\,e^{-3x}\,h(x) \qquad h(x) = \begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

d) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$

11. **Función Gama**

La función $\Gamma : \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\ dt$$

se llama *función Gama*.

a) Probar que:
$\star$ $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$.
$\star$ $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Dado $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Re}(z) < 0$ se define:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

si $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{Re}(z+n) > 0$. Mostrar que la definición no depende del $n \in \mathbb{N}$ elegido.

c)† Probar que $\Gamma(z)$ converge uniformemente en toda banda vertical de la forma $0 < \epsilon \leq \mathrm{Re}(z) \leq M$.
Deducir de c) y de b) que Γ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Transformada de Laplace

12. Hallar la transformada de Laplace de:

a) $\operatorname{sen} x$ **b)** x^3 **c)** $(x+b)^2$

13. Para $s > 0$ y $p > -1$, probar que: $\mathcal{L}(t^p)(s) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$

14. Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a) s^{-2} **b)** $s^{\frac{-1}{2}}$ **c)** $(s^2 - a^2)^{-1}$

d) $\dfrac{e^{-as}}{s^2}$ **e)** $\dfrac{1}{s^2+s+2}$ **f)** $\dfrac{e^{-3s}}{s^2+s+2}$

g) $(s-2)^{\frac{-1}{2}}$ **h)** $\dfrac{4-5s}{s^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{s^2+2s}$ **i)** $\dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}$

j) $\log(1+s^{-1})$ **k)** $\log\left(\dfrac{s+6}{s+2}\right)$

15. **a)** Hallar f tal que:

(i) $f(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-u)e^u \, du + \mathrm{ch}(t)$

(ii) $f(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t f(t)\operatorname{sen}(t-u)\, du$

b) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}\right)(t)$

c) Probar que $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{\frac{-1}{s}}}{\sqrt{s}}\right)(t) = \dfrac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$, $s, t > 0$.

16. Resolver, para $x > 0$:

   a) $u'' + 2u' + u = e^{-x}$ con: $u(0) = u'(0) = 0$

   b) $u'' + u' + u = \operatorname{sen} x$ con: $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

   c) $x\,u'' + u' + x\,u = 0$ con: $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$

   Nota: en **c)** hallar solo la transformada de Laplace de u.

17. Transformando Laplace, hallar $u(x,t)$ de clase $\mathcal{C}^1$ y de orden exponencial respecto de t, definida para $(x,t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, solución de la ecuación:

   $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - 4\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$
   $$u(x,0) = 2e^{-3x}.$$

   Sugerencia: Recordar que si $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial, $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

18. Transformando Laplace, hallar $u(x,t)$ solución de:

   a) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 2\,u(x,t) = 0$$
   $$u(x,0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$$

   b) $$y'(t) + 7\int_0^t \cos(3t - 3\tau)y(\tau)d\tau = 1 \quad (t \geq 0)$$
   $$y(0) = 2$$