

Práctica 3

Derivabilidad - Ecuaciones de Cauchy - Riemann

(preliminar)

1. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(z) = z$ b) $f(z) = z^2$ c) $f(z) = \frac{1}{z}$

2. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

a) Calcular:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad ; \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

en términos de u y de v . ¿Qué se deduce?

b) Suponiendo que u y v son de clase C^2 , calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ en z_0 .

c) Calcular $f'(z_0)$ en términos de u y de v .

3. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ y sea $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

a) Probar que g es diferenciable en (x_0, y_0) .

b) Calcular $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(x_0, y_0)$ en términos de u y de v .

c) ¿Es cierto que si f es abierta g también lo es? ¿Y el recíproco?

4. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Probar que existe $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{C} -lineal, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \alpha(h)}{h} = 0$$

• Regla de L'Hospital

Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

5. Calcular:

a) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}$

c) $\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{3}}}{z^3 + 1}$

b) $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i}$

d) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz + 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$

6. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre sus partes real e imaginaria de modo que resulte derivable en $a \in \mathbb{R}$ y calcular $\gamma'(a)$. Calcular $\gamma'(t)$ para $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$.

7. Sean $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} \quad g(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & x + iy \neq 0, \\ 0 & x + iy = 0. \end{cases}$$

Demostrar que f, g son continuas en 0 y que cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann pero no son derivables.

8. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 y + i(x^2 y^2)}{x^4 + y^2} & x + iy \neq 0, \\ 0 & x + iy = 0. \end{cases}$$

- a) Verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en el $(0, 0)$.
 b) Probar que f es derivable a lo largo de cualquier recta que pasa por $(0, 0)$, y que todas esas derivadas coinciden en el origen.
 c) Probar que f no es derivable en $z = 0$.
9. a) Mostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares se escriben:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

b) Verificar que en coordenadas polares se tiene

$$f' = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{e^{-i\theta}}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta} \right).$$

c) Calcular la derivada de $f(z) = z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} (\cos \frac{m\theta}{n} + i \sin \frac{m\theta}{n})$

10. Determinar los puntos donde f es derivable y donde es holomorfa.

- a) $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$
- b) $f(z) = \bar{z}$
- c) $f(z) = x^2 + iy^2$
- d) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

11. Determinar si las siguientes funciones son holomorfas en los conjuntos especificados y, en caso de no serlo, encontrar un conjunto abierto en el que la función sea holomorfa o bien demostrar que no es holomorfa en ninguna parte.

- a) $f(z) = \frac{3+2z}{i+2z}$ en $D : |z| < 1$
- b) $f(z) = \cos x$ en $D : |z| < 1$
- c) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ en \mathbb{C}
- d) $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ en \mathbb{C} (P, Q polinomios)
- e) $f(z) = \frac{P(z) \cdot Q(z)}{z}$ en $D : 0 < |z| < 1$ (P, Q polinomios)

12. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones y hallar $f'(z)$ en cada caso.

- a) $f(z) = z^3 - 2z$
- b) $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$
- c) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$
- d) $f(z) = x^2 + iy^3$
- e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

13. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Probar:

- a) Si f y \bar{f} son holomorfas en Ω , entonces f es constante.
- b) Si f es holomorfa en Ω y $f' = 0$ en Ω , entonces f es constante en Ω .
- c) Si f y g son holomorfas en Ω y $f' = g'$ en Ω , entonces $f - g$ es constante en Ω .

¿Es necesaria la hipótesis de conexión?

14. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Probar:

- a) $\operatorname{Re}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.
- b) $\operatorname{Im}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.
- c) $|f|$ constante $\Rightarrow f$ constante.
- d) $\operatorname{Arg}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.

Piense en cómo generalizar estos resultados en un solo enunciado y trate de probarlo en el siguiente contexto. Si $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^1 , decimos que la curva determinada en el plano complejo sus ceros mediante:

$$\mathfrak{C} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : G(x, y) = 0\}$$

es regular si $\nabla(G)(x, y) \neq 0$ para todo punto $(x, y) \in \mathfrak{C}$. Deduzca qué propiedad debería tener una función holomorfa definida en un abierto conexo Ω de \mathbb{C} si su imagen está contenida en la curva \mathfrak{C} .

15. Sea $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \operatorname{cos} y)$.
- Probar que u es armónica.
 - Encontrar v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa.
 - Hacer lo mismo para $u(x, y) = 2x(1 - y)$
16. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es conjugada armónica de u (en Ω) si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω .
- Probar que si v y \tilde{v} son conjugadas armónicas de u en Ω , entonces v y \tilde{v} difieren en una constante aditiva. ¿Falta alguna hipótesis?
 - Probar que si u y v son mutuamente conjugadas armónicas, entonces son constantes. ¿Falta alguna hipótesis?
17. a) Hallar todas las funciones holomorfas de \mathbb{C} en \mathbb{C} tales que su parte real es $x^2 - y^2$.
- b) Hallar el polinomio armónico más general entre los de la forma:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

Encontrar además la función armónica conjugada y la correspondiente función holomorfa.

- Encontrar una función f holomorfa en todo el plano complejo cuya parte real sea $e^x(x \operatorname{cos} y - y \operatorname{sen} y)$.
 - Mostrar que $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ es armónica. Indicar su dominio de armonicidad y hallar una función holomorfa que tenga a f como parte imaginaria.
 - Dada $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 se sabe que $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) = F(xy)$ es armónica en \mathbb{R}^2 . ¿Cómo debe ser F ?
18. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(z) \cdot \overline{f(z)} \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $g(z) = \log |f(z)|$ es armónica en Ω . Deduzca que, sin embargo, si $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ y $f(z) = z$ no tiene conjugada armónica ¿En qué tipo de conjuntos f si admitiría una conjugada armónica? ¿Cuales serían tales conjugadas?