INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Segundo Cuatrimestre — 2016

Práctica 2: Programación Lineal

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua.

(a) Pruebe que si f es localmente convexa entonces f es convexa.

(b) Supongamos que f es de clase C^2. Pruebe que f es convexa si y solo si $f'' \geq 0$.

2. Construya un ejemplo en el que el algoritmo SIMPLEX encuentre una solución óptima antes de que c_i sea positivo para todo i. Muestre que si ese es el caso entonces la solución tiene que ser degenerada.

3. ¿Puede una columna que acaba de dejar la base volver a entrar en el siguiente paso del algoritmo SIMPLEX?

4. Demostrar que el problema de minimizar cx sujeto a $Ax = b$ carece de interés porque sobre $\{x : Ax = b\}$ no existe el mínimo de cx o bien cx es constante.

5. Supongamos que se ha resuelto un problema de programación lineal y se desea incorporar al planteo una nueva variable no negativa con sus correspondientes datos. ¿Cómo se puede proceder sin rehacer todos los cálculos?

6. Resolver, aplicando SIMPLEX, los problemas

(a)
$$\begin{aligned} \min\ z = {} & x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\ \text{s.a.}\quad & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 2, \\ & -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \min\ z = {} & x_1 - 2x_2 - 8x_5 \\ \text{s.a.}\quad & -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \geq 4, \\ & -x_1 + 2x_2 + x_6 \geq 7, \\ & x_3 + \frac{1}{3}x_6 \leq 11 \\ & 6x_2 + x_4 \leq 3, \\ & x_i \geq 0. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \min\ z = {} & 3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a.}\quad & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2, \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 1, \\ & -4x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \min\ z = {} & x_1 - 2x_3 \\ \text{s.a.}\quad & -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ & x_3 \geq -3, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

7. Resolver aplicando las dos fases de SIMPLEX

(a)
$$\begin{aligned} \min\ z = {} & x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.a.}\quad & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ & x_1 - x_3 = 1, \\ & x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \min\ z = {} & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.}\quad & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 30, \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 14, \\ & 3x_1 - 4x_3 \geq -15, \\ & x_1 - 2x_3 = 0, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

8. Consideremos el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} \min\ z = & -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \\ \text{s.a.}\quad & \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ & \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0, \\ & x_3 + x_7 = 1, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Verificar que si se usa como criterio el de elegir el menor r cuando hay empate entoces el algoritmo no termina.

(b) Verificar que $(\frac{1}{25}, 0, 1, 0, \frac{3}{100}, 0, 0)$ es una solución óptima y que el valor del funcional en ella es $z_0 = -\frac{1}{20}$.

9. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \min\ z = & cTx \\ \text{s.a.}\quad & Ax = b \\ & eTx = 1 \\ & x_1, ..., x_{n-1} = 0, \\ & x_n \text{ libre} \end{aligned}$$

donde $e = (1, ..., 1)^T$, b y c son vectores arbitrários de dimensión n y A es la matriz $(a_{i,i} = a_{i,n} = 1$, $a_{i,j} = 0$ para $i = 1, ..., n$, $j \neq i$, $j \neq n$. Usar la restricción $e^T x = 1$ para eliminar la variable libre. Se podría hacer lo mismo si x_n no es libre?

10. Considerar el modelo lineal

$$\begin{aligned} \min\ z = & cTx \\ \text{s.a.}\quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Transformarlo en un modelo equivalente en forma estandard tal que el vector de términos independientes sea cero. (Pista: se puede hacer introduciendo una variable y una restricción adicionales)

11. Considerar un modelo de programación lineal con restricciones en forma estándard $Ax = b$ y $x = 0$. Probar que si $d \neq 0$ cumple $Ad = 0$ y $d \geq 0$, entonces d es una dirección de no acotamiento.

12. Encuentra todos los valores del parámetro α tales que las regiones definidas por por las siguientes restricciones presentan vertices degenerados.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 6x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq a \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

13. Resolver los siguientes problemas de programación lineal usando el método del simplex. Si el problema es 2-diemensional, hacer un esquema de la región de soluciones factibles y señalar el progreso del algoritmo.

(a)
$$\begin{aligned} \min\ z = & -5x_1 - 7x_2 - 12x_3 + x_4 \\ \text{s.a.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 38 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 55 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \max\ z = & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a.}\quad & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \min\ z = & 3x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a.} & -5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \min\ z = & 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a.}\quad & 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 22 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} \max\ z = & 7x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a.}\quad & 4x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x1, x2 \geq 0. \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} \min\ z = & -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \\ \text{s.a}\quad & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 48 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

14. Usando el test de optimalidad encontrar todos los valores del parámetro a tal que $x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0)^T$ es la solución óptima del problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min\ z = & -x_1 - a^2 x_2 + 2x_3 - 2ax_4 - 5x_5 + 10x_6 \\ \text{s.a.}\quad & -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0. \end{aligned}$$

15. La siguiente tabla corresponde a alguna iteración del método del simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
$-z$	0	a	0	b	c	3	
	0	-2	1	e	0	2	d
	1	g	0	-2	0	1	f
	0	0	0	h	1	43	1

Hallar condiciones sobre a, b, …, h tales que se cumpla:

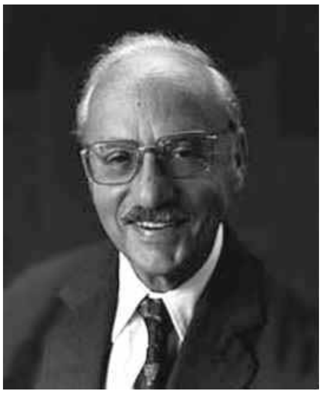
(a) La base actual es óptima.
(b) La base actual es la única base óptima.
(c) La base actual es optima, pero existen más bases optimas diferentes.
(d) El problema no está acotado.
(e) La solución actual mejorará si x_4 aumenta, y cuando x_4 entre en la base, el cambio en la función objetivo sea cero.

16. Usar el método del simplex (de dos fases y Método M) para resolver los siguientes problemas de programación lineal:

$$(a)\quad \begin{aligned} \min z =& -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \\ \text{s.a.}\quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 30 \\ & x1 + 2x2 + 4x3 = 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} \min z =& -4x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.}\quad & 3x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ & -2x_1 + x_2 = 2 \\ & x1, x2, \geq 0, \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} \min z =& 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.a.}\quad & -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$



George Dantzig
1914 - 2005

George Dantzig fue un matematico estadounidense que hizo importantes contribuciones a la Investigación Operativa. Él desarrolló el algoritmo simplex para resolver problemas de programación lineal.