Investigación Operativa
Segundo Cuatrimestre — 2016

Práctica 5: Camino mínimo y flujo en redes

1. En cada caso indicar que tipo de representación sería más adecuada (matriz de adyacencia o lista de vecinos) y el número de operaciones necesarias:

(a) Comprobar si el vértice i es adyacente al vértice j.
(b) Calcular el grado del vértice i.
(c) Añadir una arista entre los vértices i y j.
(d) Comprobar si el grafo es nulo (no tiene aristas)
(e) Eliminar la arista entre los vértices i y j.
(f) Calcular el número de aristas del grafo.
(g) Comprobar si el grafo es regular.

2. Modificar el algoritmo BFS para que calcule la distancia mínima entre dos vértices dados, y que además nos permita recuperar un camino mínimo.

3. Una persona dispone de un departamento que desea alquilar durante el verano. Luego de publicarlo en los clasificados obtiene N ofertas. Cada oferta consta de 3 datos: el monto ofrecido, el día de inicio y el día de finalización.

Esta persona desea maximizar sus ganancias. Modelar el problema como un problema de grafos y resolverlo con un algoritmo conocido.

4. Calcular la complejidad del algoritmo de Dijkstra en el caso en que π se guarda en una parva (heap) en lugar de en una lista.

5. Escribir en pseudocódigo los algoritmos de Floyd y de Dantzig.

6. Sea $G = (V, E)$ un grafo con costos en las aristas. Notemos c_{ij} el costo de la arista que une v_i y v_j.

(a) Dado π un vector de n coordenadas consideremos $c^{\pi}_{ij} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$ unos nuevos costos. Mostrar que los caminos mínimos con estos nuevos costos son los mismos que antes (el costo total de cada camino puede cambiar).
(b) Supongamos que G no tiene ciclos negativos y sea s un nodo distinguido en G, tomemos π_i como la longitud del camino minimo (con los costos originales) desde s hasta v_i. Demostrar que $\pi_j \leq \pi_i + c_{ij}$.
(c) Probar que si vale $\pi_j \leq \pi_i + c_{ij}$ entonces los nuevos costos son no-negativos.
(d) Supongamos que los vértices de G son puntos del plano y los costos son las distancias euclideas. Demostrar que tomando $\pi_i = ||s - v_i||_2$ se tiene $\pi_j \leq \pi_i + c_{ij}$.

7. Encontrar un emparejamiento máximo en el grafo $G(V, E)$ bipartito siguiente:
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
$E = \{(1, 4), (1, 8), (1, 9), (2, 5), (2, 9), (2, 12), (3, 5), (3, 11), (3, 12), (4, 6), (7, 12), (7, 13), (10, 12)\}$

8. Mostrar cómo resolver el problema de matching máximo bipartito, considerándolo como un problema de flujo máximo en una red conveniente.
Nota: El problema de matching máximo bipartito consiste en dado un grafo bipartito elegir un conjunto de aristas del mayor cardinal posible con la propiedad de que en cada vértice incide a lo sumo una arista del conjunto.

9. ¿Cómo se puede resolver el problema de flujo máximo en una red si los vértices también tienen capacidades máximas?.

10. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v, w \in V$. ¿Cuántos caminos disjuntos en aristas se pueden encontrar simultáneamente entre v y w? ¿Y disjuntos en vértices?.

11. Sea $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ una lista de números naturales sin repeticiones. Se quieren armar parejas con estos números, de forma que en cada pareja la suma de ambos números sea primo. ¿Cuál es la máxima cantidad de parejas que se pueden armar?. Modelar este problema como un problema de flujo.

Ejemplo: Si los números son 2,3,4,5 se pueden armar 2 parejas 2-5, 3-4. Pero si son 2,3,4,6, sólo se puede armar una pareja.

12. Dadas d_{in} y d_{out} dos n-tuplas de naturales se desea saber si existe un grafo dirigido G tal que los grados de entrada y salida de cada vértice v_i sean $d_{in}(i)$ y $d_{out}(i)$ respectivamente. Modelar como un problema de flujo en redes.

13. En la bolsa de Buenos Aires se hicieron mediciones de los precios de l acciones durante k días, llamamos $a_{i,j}$ al precio de la acción i en el día j. Para presentar los resultados del estudio vamos a usar graficos del valor de cada acción en función del tiempo formando una poligonal. Es posible incluir los datos de más de una acción en el mismo gráfico siempre y cuando las poligonales no se corten. Diseñar un algoritmo que calcule el mínimo número de gráficos en el que se pueden acomodar la totalidad de las acciones (los algoritmos vistos en clase se pueden usar sin explicación).
Sugerencia: Considerar el grafo G con vértices $V = \{1, \cdots, l\}$ y aristas

$$E = \left\{ i \to j : \text{ si la acción } i \text{ se puede dibujar por abajo de la acción } j \right\}$$

Robert W. Floyd
1936 – 2001

Fue un eminente científico de la computación. Sus contribuciones incluyen el diseño del algoritmo de Floyd-Warshall (independientemente de Stephen Warshall), el cual encuentra eficientemente todos los caminos mínimos en un grafo, el algortimo de busqueda de ciclos de Floyd y su trabajo en parsing.