Cuádricas à la Keilhauer
borrador 0.2

Francisco Kordon

30 de agosto de 2016

Índice

Estas son notas tomadas de las notas de Guillermo Keilhauer.

1. Recuerdos de álgebra lineal

Un punto v en $\mathbb{R}^n$ frecuentemente se dibuja como una flecha de 0 a v. En muchas situaciones es conveniente pensar en la misma flecha pero saliendo de un punto $p \in \mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable y $t \in \mathbb{R}$, entonces $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$ es un punto de $\mathbb{R}^n$; el segmento que une $c(t)$ y $c(t) + c'(t)$ es tangente a la curva y el "vector tangente"$c'(t)$ de la curva c se dibuja como una flecha de $c(t)$ a $c(t) + c'(t)$ [?., spivak1]

1.1. Fijemos $V = (V, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Dado $p \in V$, daremos otra (si $p \neq 0$) estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de manera que p cumpla el rol del origen. Notemos $+_p$ y $\cdot_p$ a las nuevas operaciones; las definimos por {para:traslacion}

$$x +_p y = x + y - p$$
$$\lambda \cdot_p x = p + \lambda(x - p).$$

Puede verificarse que $V_A = (V, +_p, \cdot_+)$ resulta un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Proposición. *Sea $p \in V$. La traslación $t_p : V \ni v \mapsto v + p \in V_p$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Claramente, t_p es una biyección de conjuntos. Hay que constatar que respeta suma y producto; en efecto, tenemos

$$t_p(x) +_p t_p(y) = (x + p + y + p) - p = x + y + p = t_p(x + y)$$

y

$$t_p(\lambda x) = \lambda x + p = p + \lambda(x + p) - \lambda p = \lambda \cdot_p t_p(x),$$

como queríamos. □

Observemos que para cada $p, q \in V$, la traslación de V_p a V_q que consiste en sumar $q - p$ es la composición de t_q y t_{-p}, y por lo tanto es también un isomorfismo de espacios vectoriales.

Para cada $p \in V$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V sii $\{v_1 + p, \ldots, v_n + p\}$ es una base de V_p. En particular, si x tiene coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ respecto de una base $\{v_1 + p, \ldots, v_n + p\}$ de V_p, es

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cdot_p (v_n + p) +_p \ldots +_p x_n \cdot_p (v_n + p) = t_p(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) \\ &= x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n + p. \end{aligned} \tag{1}$$ {eq:xencoord}

1.2. Recordemos de álgebra lineal (ver, por ejemplo [JST08]) que una subvariedad lineal de un espacio vectorial V un subconjunto que se deja escribir $S + p$, con S un subespacio y p un punto de V. Observemos que $S + p = t_p(S)$; como t_p es un isomorfismo, una variedad lineal *que pasa por* p es un subespacio S de V_p. jeron

Una función $f : V \to V$ es una transformación afín si existe $p \in V$ tal que $f : (V, +, \cdot) \to (V, +_p, \cdot_p)$ es una transformación lineal. Equivalentemente, f es afín sii $t_{-p} \circ f$ es lineal sii $f = p + g$, con $g : V \to V$ una transformación lineal.

1.3. La aplicación $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica si es lineal respecto a cada variable y $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ para cualquier $x, y \in V$.

El principal ejemplo que nos interesa es en el que $V = \mathbb{R}^n$. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica, $\phi(x, y) = xMy^t$ es una forma bilineal simétrica.

Ejemplo. Algún ejemplo de una cuádrica no trivial, con grafico de ser posible. !

Sean $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $x, y \in V$. Denotando por x_i y y_i, con $1 \leq i \leq n$, a las coordenadas de x e y, tenemos

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \phi(v_i, w_j) \\ &= (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} \phi(v_1, w_1) & \cdots & \phi(v_1, w_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(v_n, w_1) & \cdots & \phi(v_n, w_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz $\|\phi\|_B := (\phi(v_i, w_j))_{i,j=1}^n$ se llama la matriz de ϕ con respecto a la base B. Puede verificarse que si B' es otra base de V y C es la matriz de cambio de base de B'

a B, entonces

$$\|\phi\|_B = C\|\phi\|_{B'}C^{-1}.$$

En particular, se ve que el rango de la matriz de ϕ es independiente de la base elegida. Definimos, pues, el rango de ϕ como tal número

Si $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica, para cada $x \in V$ podemos considerar la aplicación lineal $L_\phi : V \to \mathbb{R}$ definida por $y \mapsto \phi(x,y)$. Fijada una base B de V, si $x_B := (x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de x en B, tenemos que el núcleo de L_ϕ es

$$\{x \in V \mid x_B\|\phi\|_B = 0.\}$$

Definimos, pues, el núcleo de ϕ por $\operatorname{Nu}\phi := \operatorname{Nu} L_\phi$.

1.4. Una función $\psi : V \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática si $\psi(ax) = a^2\phi(x)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $x \in V$. Si ψ lo es, entonces

$$\phi : V \times V \ni x, y \mapsto \frac{1}{2}\left(\psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y)\right) \in \mathbb{R}$$

es bilineal y simétrica. Recíprocamente, dada una forma bilineal simétrica ϕ puede construirse una forma cuadratica ψ poniendo $\psi(x) = \phi(x,x)$ y esta asignación es la inversa de la anterior.

{propo:diagsimetr}

1.5. Proposición. *Si $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica entonces existe una base B de V tal que $\|\phi\|$ es diagonal; los posibles valores de la diagonal son -1 , 1 y 0.*

Demostración. Hacer. □

Sean ϕ y B como en la Proposición 1.5. Sean $s, r \in \mathbb{N}_0$ tales que la cantidad de 1's que aparecen en la diagonal de ϕ es s y de -1 es $r - s$. Si ψ es la forma cuadrática asociada a ϕ, tenemos

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2.$$

Diremos que ϕ es

(i) definido positivo si $s = r = n$;
(ii) definido negativo si $s = 0$ y $r = n$;
(iii) semidefinido positivo si $s = r < n$;
(iv) semidefinido negativo si $s = 0$ y $r < n$;
(v) indefinido si $s > 0$ y $r - s > 0$.

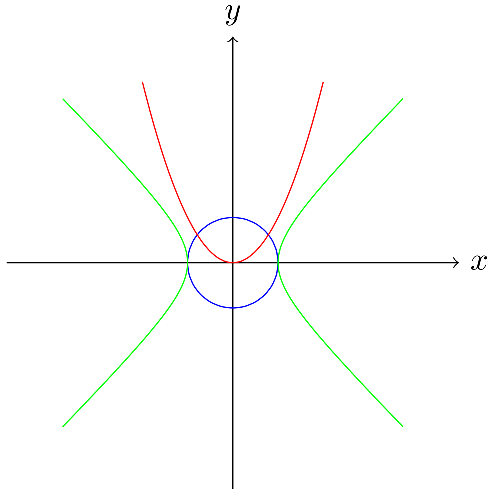

Figura 1. Gráficos del círculo, la parábola y la hipérbola, en azul, rojo y verde. {fig:2dcuadricas}

2. Cuádricas

2.1. El círculo, la parábola y la hipérbola en $\mathbb{R}^2$ son los ceros de las funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dadas por $x^2 + y^2 - 1$, $x^2 - y$ y $x^2 - y^2 - 1$. Pueden verse en la Figura 1.

En $\mathbb{R}^3$, la esfera, el cono, el cilindro, el paraboloide elíptico (entre otros) se describen como los ceros de ciertas funciones $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y están ilustrados en la Figura 2 y en la Figura 3.

Definición. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión* n*. Una función* $F : V \to \mathbb{R}$ *es una función cuadrática si es de la forma* $F = \psi + 2\varphi + c$*, siendo* ψ *una forma cuadrática no nula,* φ *una función lineal y* c *una constante.*

El conjunto $Q \coloneqq F^{-1}(0)$ *se denomina, si no es vacío, una cuádrica. Cuando* $n = 2$*, se dice también una cónica.*

Sean $B = \{v_i\}$ una base de V, $a = (a_{ij})$ la matriz de ψ respecto a B y $b_i = \varphi(v_i)$. Si $x \in V$ tiene coordenadas $x_B = (x_1, \dots, x_n)$ en la base V, es

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$$

y, en escritura matricial, esto es igual a $x_B a x_B^t + b x_B^t + c$.

2.2. Fijemos F una función cuadrática como en la definición anterior y supongamos {para:unicidad}
que tenemos otra escritura $F = \psi' + 2\varphi' + c'$. Tomando $x = 0$ resulta $c = c'$; evaluando primero en x y después en $-x$ es

$$\psi(x) + 2\varphi(x) = \psi'(x) + 2\varphi'(x),$$
$$\psi(-x) + 2\varphi(-x) = \psi'(-x) + 2\varphi'(-x), \text{ i.e. } \psi(x) - 2\varphi(x) = \psi'(x) - 2\varphi'(x).$$

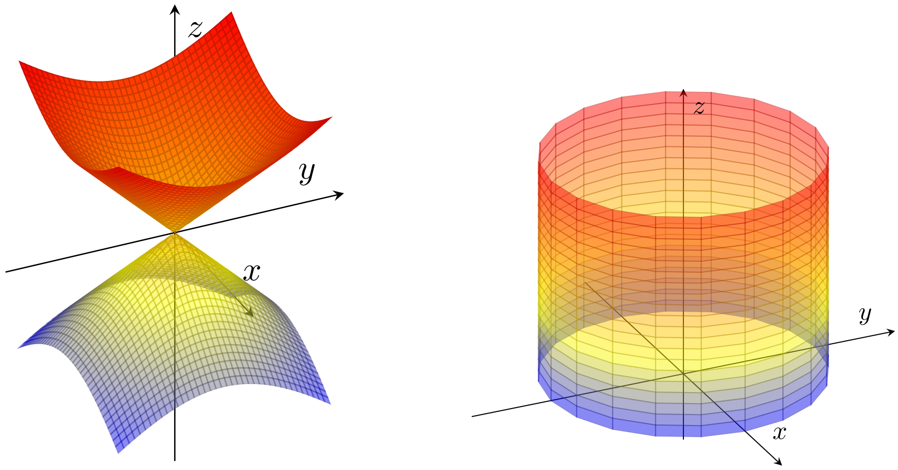

Figura 2. El cono, que es la cuádrica que corresponde a los ceros de $F = x^2 + y^2 - z^2$, y el cilindro, $F = x^2 + y^2$. {fig:cono,cilindro}

Sumando ambas ecuaciones obtenemos $\psi = \psi'$, y luego $\varphi = \varphi'$.

{propo:cambiodeor

2.3. Proposición (cambio de origen). *Si* $p \in V$, *existen únicos* $\psi_p : V_P \to \mathbb{R}$ *forma cuadrática no nula,* $\varphi_p : V_p \to \mathbb{R}$ *forma lineal y* $c_p \in \mathbb{R}$ *tales que* $F = \psi_p + 2\varphi_p + c_p$.

Demostración. La unicidad es consecuencia de 2.2; veamos la existencia. Para esto, deduzcamos cómo deben ser ψ_p, φ_p y c_p, asumiendo que $F = \psi + 2\varphi + c$. Para empezar, es $c_p = F(p) = \psi(p) + 2\varphi(p) + c$. Como t_p es un isomorfismo de espacios vectoriales, la composición $\psi_P := \psi \circ t_p^{-1} : V_P \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática no nula sobre V_p. Definamos ahora φ_p por la ecuación

$$\psi_p + 2\varphi_p + c_p = \psi + 2\varphi + c.$$

{lema:fhi_p}

2.4. Lema. *Es, para todo* $x \in V$, $\varphi_p(x) = \phi(x - p, p) + \varphi(x - p)$.

Escribiendo $\varphi_p(x) = \phi(t_p^{-1}(x), p) + \varphi \circ t_p^{-1}(x)$, vemos que $\varphi_p : V_p \to \mathbb{R}$ es suma de funciones que son composición de $t_p^{-1} : V_p \to V$ y una forma lineal en V: φ_p resulta, pues, lineal. $\square$

Centros de una cuádrica

2.5. Sea Q una cuádrica definida por $F = \psi + 2\varphi + c$. Si $p \in V$ satisface que $\varphi_p = 0$, entonces $F(x) = \psi_p(x) + c_p = \psi(x - p) + c_p$. Como $\psi_p(-_p x) = \psi_p(x)$ para todo x, es cierta la implicación $x \in Q \implies -_p x \in Q$. Es fácil ver que vale la implicación recíproca, esto es, si p es tal que $x \in Q \implies -_p x \in Q$, entonces $\varphi_p = 0$. Decimos, pues, que p es un centro de Q si $\varphi_p = 0$.

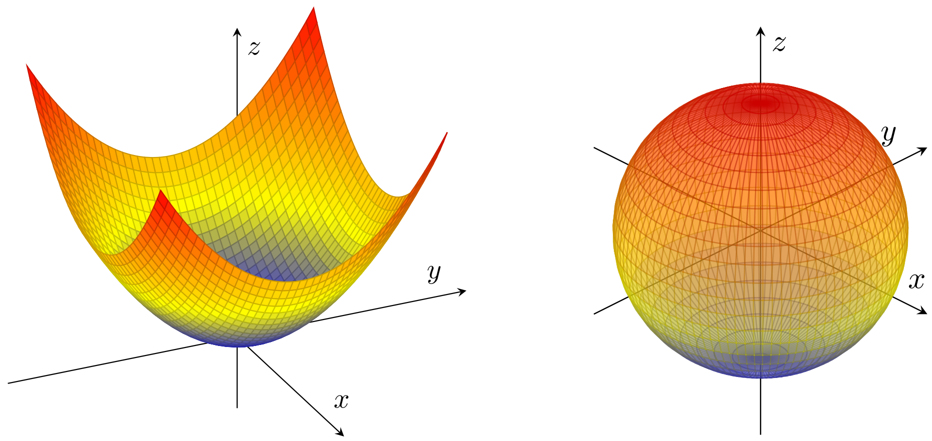

Figura 3. El paraboloide y la esfera, que corresponden a los ceros de $F = x^2 + y^2 - z$ y de $F = x^2 + y^2 - 1$. {fig:paraboloide,esf

Ejemplo. El cono es la cuádrica Q obtenida como los ceros de $F = x^2 + y^2 - z^2$. Aquí, la parte lineal es cero, $c = 0$ y

$$\psi = F = x^2 + y^2 - z^2 = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

El punto $(0, 0, 0)$ es un centro de Q. Supongamos que p es otro centro de Q; por la Proposición 2.3 podemos escribir $\psi_p(x) = \psi(x - p)$, $c_p = F(p)$ y $2\varphi_p = \psi - \psi_p - c_p$. Si ϕ es la forma bilineal asociada a ψ, esto último es igual a

$$\begin{aligned} &\phi(x, x) - \phi(x - p, x - p) - \phi(p, p) \\ &= \phi(x, x) - \phi(x, x) + \psi(x, p) + \phi(p, x) - \psi(p, p) - \phi(p, p) = 2\phi(x, p). \end{aligned}$$

Que valga cero $\phi(x, p)$ para todo x equivale a decir que el vector de coordenadas en la base canónica de p está en el núcleo de la matriz de ϕ; como ésta es inversible, el único valor posible de p es cero. Concluimos que *el* centro del cono es 0.

2.6. Calculemos ahora el centro para una cuádrica genérica $Q \ : \ F = \psi + 2\varphi + c = 0$. Sean B una base de V y $M = \|\phi\|_B$, donde ϕ es la forma bilineal asociada a ψ. Sean, para cada $1 \leq i \leq n$, $b_i = \varphi(v_i)$ y $p = \sum x_i v_i$. Por el Lema 2.4, que φ_p sea nula equivale a que, para todo $y \in V$,

$$0 = \phi(y - p, p) + \varphi(y - p)$$

o, equivalentemente, para todo $z = \sum z_i v_i \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(z, p) + \varphi(z) = zMx^t + zb^t \\ &= z(Mx^t + zb^t), \end{aligned}$$

y esto último es equivalente a que p sea tal que $Mx^t = -b^t$. Notando Q_C al conjunto de centros de la cuádrica Q, hemos probado que

$$Q_C = \{p \text{ con coordenadas } x \text{ en } B \mid Mx^t = -b\}$$

Ejemplo. Ver que el centro del cilindro es la recta $z = 0$ y que el paraboloide elíptico no tiene centro

{ej:defcono}

2.7. *Ejemplo.* Sea Q una cuádrica que contiene un centro p. Escribiendo, como en 2.3, $F = \psi_p + \varphi_p + c_p$, tenemos que $\varphi_p = 0$ y $c_p = 0$. Así, si $q \in Q$ y $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t \cdot_p q) = \psi_p(t \cdot_p q) = t^2 \psi_p(q) = t^2 F(q) = 0;$$

esto es, la recta $L_q = \mathbb{R} \cdot_p q$ está contenida en Q. En este caso decimos que Q es un cono; queda como ejercicio probar que, de hecho, cualquier centro de un cono debe pertenecerle. [1]

Reducibilidad

2.8. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*a*) existe un hiperplano H de V tal que $H \subseteq Q$;
(*b*) existen hiperplanos H_1 y H_2 de V tales que $Q = H_1 \cup H_2$;
(*c*) existen $\phi_1, \phi_2 : V \to \mathbb{R}$ lineales y no nulas y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de manera que

$$F(x) = (\varphi_1(x) + c_1)(\varphi_2(x) + c_2)$$

Si cualquiera de estas afirmaciones se satisfacen, Q se dice reducible.

Demostración. Es claro que *(c)* implica *(b)* y que ésta implica *(a)*. Veamos que *(a)* implica *(c)*. Verlo. $\square$

Recta tangente y plano tangente

2.9. *Ejemplo.* En la Figura 3 se ve el gráfico de la la esfera en $\mathbb{R}^3$, que es la cuádrica S definida por $F = x^2 + y^2 + z^2$. Fijado un punto $p \in S$, el plano tangente puede pensarse como el conjunto de velocidades al pasar por p de curvas contenidas en S. Si, en efecto, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ es una curva diferenciable con $c(0) = p$, por estar contenida en S es $\|c(t)\| = 1$ para todo t y, derivando, vemos que $c(t)$ y $c'(t)$ son perpendiculares. El plano perpendicular a $p = (a_1, a_2, a_3)$ viene dado por la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, y, si lo corremos hasta p, tenemos que

$$T_pS = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1\}.$$

[1] Mirar la igualdad (2) si no sale.

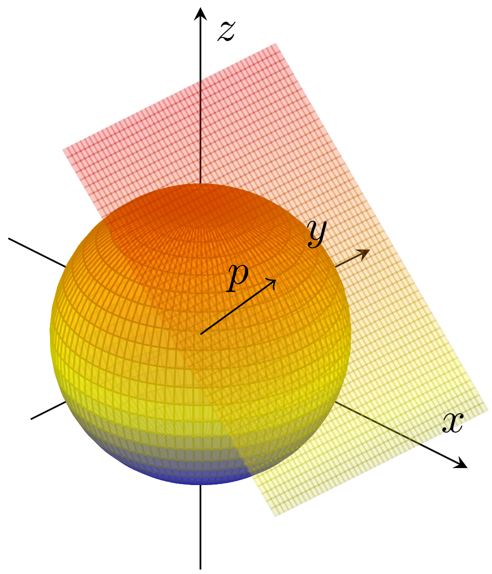

Figura 4. El plano tangente a la esfera en p. {fig:planotgteS}

Si $x \in \mathbb{R}^3$, por el Lema 2.4 es

$$\begin{aligned}\varphi_p(x) &= \phi(p, x-p) + \varphi(x-p) = pI(x-p)^t \\ &= a_1(x_1 - a_1) + a_2(x_2 - a_2) + a_3(x_3 - a_3) \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - 1 = 0,\end{aligned}$$

y entonces $T_pS = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_p(x) = 0\}$. Afirmamos que las rectas de la forma $L_q : t \cdot_p q$, $t \in \mathbb{R}$ para $q \neq p$ en el plano tangente son rectas tangentes a Q en p. En efecto, evaluando en $t = 0$ vemos que $0 \cdot_p q = p \in L_q$, y la recta es perpendicular a p puesto que q es un vector tangente.

Al evaluar F en $t \cdot_p q$, buscamos la intersección de S con L_q. Es $F(t \cdot_p q) = t^2\psi_p(q)$ y, puesto que $\psi_p(q) \neq 0$ porque de lo contrario $L_q \subseteq S$, vemos que $t = 0$ es una raíz doble.

2.10. Situación general. Sean $Q : F = \psi + 2\varphi + c = 0$ una cuádrica, $p \in Q$ y $q \in V \setminus \{p\}$. La intersección entre Q y $L_q = \mathbb{R} \cdot_p q$ se analiza estudiando los ceros de $f(t) = t^2\psi_p(q) + 2t\varphi_p(q)$, que es la evaluación de F, expresada como en la Proposición 2.3, en un punto genérico de L_q parametrizado por t. Hay varias situaciones posibles. Supongamos primero que {para:sitgeneral}

(a) p no es un centro de Q; equivalentemente, $\varphi_p \neq 0$. Pueden pasar cuatro cosas; tres de ellas pueden verse claramente en el cilindro en la Figura 5.

graficar?

(I) $\varphi_p(q) = 0$ y $\psi_p(q) = 0$. Como $c_p = 0$, esto dice que $f(t) \equiv 0$ y $L_q \subseteq Q$. Este es el caso del cilindro y una recta meridional.

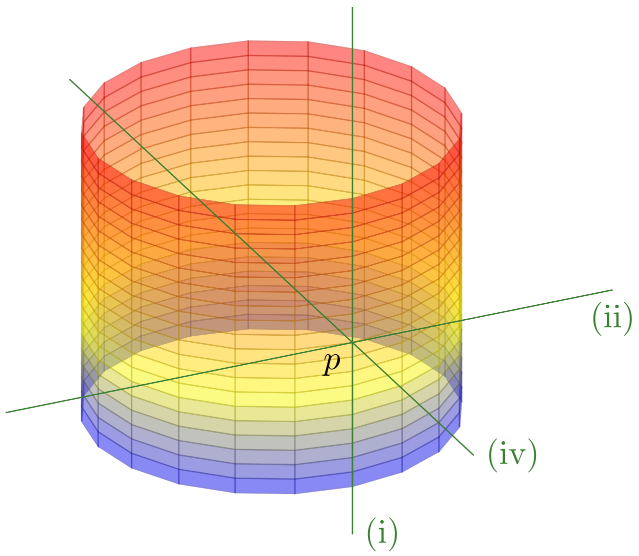

Figura 5. Las rectas de 2.10 para $p = (1, 0, 0)$ en el cilindro. {fig:cilindrorectas}

(II) $\varphi_p(q) = 0$ y $\psi_p(q) \neq 0$, con lo que $t = 0$ es raíz doble. Este es el caso de la esfera cuando q está en T_pS; esto es, L_q es tangente a S. También esto puede verse en el cilindro, considerando una recta tangente contenida en el plano $z = 0$.

(III) $\varphi_p(q) \neq 0$ y $\psi_p(q) = 0$: $t = 0$ es raíz simple. Aquí L_q no es tangente a Q; lo interseca de forma perpendicular.

(IV) $\varphi_p(q) \neq 0$ y $\psi_p(q) \neq 0$: f tiene dos raíces; esto es, $|L \cap Q| = 2$. Este es el caso del cilindro y una recta que lo corta de manera "genérica".

(b) p es un centro de Q. Aquí, solo quedan las primeras dos opciones pero con p centro de Q; un ejemplo es el cono, que tiene su centro en el origen. Para la primera opción, la recta $x = z$ (que corresponde, verbigracia, a $L_{(1,0,1)}$), está contenida en el cono y pasa por el origen. Para la segunda, basta considerar un punto q en el plano $z = 0$. graficar

{def:tangentes}

2.11. Definición. *Dado un punto p de Q que no es un centro —esto es, $\varphi_p \neq 0$—, decimos que $L_q = \mathbb{R} \cdot_p q$ es una recta tangente a q en p si $\varphi_p(q) = 0$. El (hiper) plano tangente a Q en p, que denotamos T_pQ, es*

$$T_pQ \coloneqq \{q \in V \mid \varphi_p(q) = 0\}.$$

Dado p centro de Q, la recta L_q es tangente a Q en p si $\psi_p(q) = 0$. En este caso, no hay hiperplano tangente a Q en p salvo el caso en que Q es un hiperplano o unión de hiperplanos.

3. Clasificación

3.1. Ecuación normal afín de las cuádricas

Con centros

Sea Q una cuádrica que tiene centros. Hay dos posiblidades: bien $Q_C \cap Q = \varnothing$ o bien, si un centro está en Q, entonces todos lo están y Q es un cono como en 2.7.

3.1. Sean Q un cono y sea p un centro en Q. Es $F = \psi_p$; merced a la Proposición 1.5 podemos elegir una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V de manera que la forma bilineal ϕ asociada a ψ tenga matriz diagonal, con s la cantidad de 1's en y r tal que $r - s$ es la cantidad de -1's. Cambiando F por $-F$ de ser necesario podemos suponer que $s \geq r - s$. Ponemos, como en 1.1, $w_i = v_i + p$, y $\{w_i\}$ es una base de V_p. Escribiendo, como en (1),

$$x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n + p,$$

es

$$F(x) = \psi(x - p) = \psi(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2.$$

Esta última expresión se denomina la ecuación normal afín de Q.

3.2. Supongamos que Q no es un cono; sea $p \notin Q$ un centro de Q: es $F(q) \neq 0$. Si q es otro centro, $F(q) = F(p)$: en efecto,

$$\begin{aligned} F(p) &= \psi_q(p) + c_q = \psi(q - p) + c_q \\ &= \psi_p(q) + c_q = F(q) - c_q + c_q = F(q). \end{aligned} \tag{2}$$

{eq:doscentros}

Definimos ahora $G(x) = -F(x)/F(p)$, y $G(p) = -1$. Escribiendo F con el origen en p,

$$G(x) = \frac{-1}{F(p)}(\psi_p(x) + 2\varphi_p(x) + c_p) = \psi'_p(x) + c'_p,$$

con $c'_p = -c_p/F(p) = -1$. Sean ϕ' la forma bilineal asociada a ψ' y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V de modo que $\|\phi'\|_B$ es como en la Proposición 1.5. Escribiendo, como en (1),

$$x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n + p,$$

es

$$G(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2 - 1,$$

expresión que se denomina la ecuación normal afín de Q.

Sin centros

Sea $Q : F = \psi + 2\varphi + c = 0$ una cuádrica sin centros. Sean ϕ la forma cuadrática asociada a ψ; como en el caso del cono, reemplazando de ser necesario F por $-F$ podemos suponer que $s \geq r - s$.

{lema:sincentros}

3.3. Lema. (I) *Si* $Q_c \neq \varnothing$ *entonces* $r < n$ *y existe* $u \in \mathrm{Nu}(\phi)$ *tal que* $\varphi(u) \neq 0$.

(II) *Si* H *es un hiperplano de* V *que no contiene a* $\mathrm{Nu}(\phi)$ *entonces* $r(\phi|_H) = r(\phi)$ *y* $s(\phi|_H) = s(\phi)$.

Demostración. Llamando, para cada $1 \leq i \leq n$, $b_i = \varphi(v_i)$ y $x_B = (x_i)$ a las coordenadas de x en B, tenemos

$$Q_c = \{x \in V \mid \|\phi\|_B x_B^t = -b^t.\}$$

Como $Q_c \neq \varnothing$, el determinante de $\|\phi\|_B$ debe anularse, es decir, $r < n$ y por lo tanto existe $1 \leq j \leq n - r$ tal que $0 \neq b_{r+j} = \varphi(v_{r+j})$. Como $\mathrm{Nu}(\phi) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$, $u = v_{r+j}$ sirve.

Si elegimos $u \in \mathrm{Nu}(\phi)$ y H hiperplano de V con $u \notin H$, se tiene que $V = H \oplus \langle u \rangle$; tomando B' una base de H y llamando $B = B' \cup \{u\}$ es

$$\|\phi\|_B = \begin{pmatrix} \|\phi|_H\|_{B'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, $r(\phi|_H) = r(\phi)$ y $s(\phi|_H) = s(\phi)$. □

3.4. Sean $p \in Q$, $T_p = \ker(\varphi_p : v_p \to \mathbb{R})$ el plano tangente a Q en p y

$$H = \{x \in V \mid \varphi(x) + \phi(p, x) = 0\};$$

es, como en el Lema 2.4, $T_p = p + H$. Por el Lema 3.3, existe $u \in \mathrm{Nu}(\phi)$ tal que $\varphi(u) \neq 0$ y, como $u \notin H$, $V = H \oplus \langle u \rangle$ y $r(\phi|_H) = r(\phi)$ y $s(\phi|_H) = s(\phi)$. Sea $B' = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ una base de H tal que $\phi|_H$ es como en la Proposición 1.5; $\{w_i = v_i + p\}$ es una base de T_p como subespacio de V_p. Siendo $B = B' \cup \{u\}$ una base de V, poniendo $w = u + p$ tenemos que para cada $x \in V$

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cdot_p w_1 +_p \dots +_p x_{n-1} \cdot_p w_{n-1} +_p x_{n-1} \cdot_p w \\ &= p + x_1 v_1 + \dots + x_{n-1} v_{n-1} + x_n u, \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned} F(x) &= \psi_p(x) + 2\varphi_p(x) \\ &= \psi_p(x) + 2\varphi_p(x_1 \cdot_p w_1 +_p \dots +_p x_{n-1} \cdot_p w_{n-1} +_p x_{n-1} \cdot_p w) \\ &= \psi_p(x) + 2x_1 \varphi_p(w_1) + \dots + 2x_{n-1} \varphi_p(w_{n-1}) + 2x_n \varphi_p(w) \\ &= \psi_p(x) + 2x_n \varphi_p(w) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2 + 2x_n \varphi_p(w). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\varphi_p(w) = \phi(p, w-p) + \varphi(w-p) = \phi(p, u) + \varphi(u) = \varphi(u) \neq 0.$$

Cambiando ahora u por $v_n = -\frac{u}{2\varphi(u)}$, es $\varphi(v_n) = -\frac{1}{2}$ y, llamando $w_N = v_n + p$, podemos escribir x como en (1) para obtener

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2 - x_n.$$

Esta escritura se denomina la ecuación normal afín de Q.

3.2. Caso euclídeo

3.5. Fijemos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en V. Sean Q una cuádrica y ϕ su forma bilineal asociada. Como $\varphi : V \to \mathbb{R}$ es lineal, existe un único $q \in V$ tal que $\varphi(x) = \langle q, x \rangle$ para todo $x \in V$.

La aplicación $L_{\langle \cdot, \cdot \rangle} : V \ni p \mapsto \langle p, - \rangle \in V^\star$ es un isomorfismo; si escribimos $\alpha = L_{\langle \cdot, \cdot \rangle}^{-1} \circ L_\phi : V \to V$ vale $L_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \circ \alpha = L_\phi$, y entonces para cualesquiera $x, y \in V$ tenemos

$$\langle \alpha(x), y \rangle = \phi(x, y).$$

Este α se suele llamar *el endomorfismo* asociado a ϕ o ψ. Dado $p \in V$, resulta

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= \phi(p, x-p) + \varphi(x-p) \\ &= \langle \alpha(p), x-p \rangle + \langle q, x-p \rangle = \langle \alpha(p) + q, x-p \rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\varphi_p = 0$ sii $N_p := \alpha(p) + q = 0$. En particular, si $p \in Q$ es tal que $\varphi_p \neq 0$ entonces $T_pQ : \varphi_p = 0$ es igual a $p + H$ y resulta $N_p \perp H$: la recta $L_p = p + \mathbb{R}N_p$ es la recta perpendicular a T_pQ en p. graficar?

3.6. El endomorfismo α es autoadjunto respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$: para $x, y \in V$ es

$$\begin{aligned} \langle \alpha(x), y \rangle &= \phi(x, y) = \phi(y, x) \\ &= \langle \alpha(y), x \rangle, \end{aligned}$$

y por el Teorema Espectral existe una base ortonormal $U = \{u_1 \dots, u_n\}$ de V y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de forma que

$$\|\phi\|_U = |\alpha|_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Reordenando eventualmente la base, podemos suponer que los primeros s λ's son positivos, después vienen los $r-s$ negativos y finalmente $n-r$ los nulos. Escribiendo $x = \sum x_i u_i$ resulta

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} (-\lambda_i) x_i^2$$

Sean, si $1 \leq i \leq s$, $c_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$ y, si $s+1 \leq i \leq r$, $d_i = 1/\sqrt{-\lambda_i}$; tanto los c's como los d's son positivos. Obtenemos

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{c_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{d_i^2}.$$

Esta escritura de ψ se denomina representación métrica, y U es una base ortonormal *adaptada a* ψ.

En lo que sigue excluimos los conos; esto es, las cuádricas que tienen intersección con su centro (y que, por (2), contienen a su centro). Sea Q una cuádrica con ecuación

$$F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = \langle \alpha(x), x \rangle + 2\langle p, x \rangle + c = 0.$$

3.7. Si Q tiene centros, fijado $p \in Q_c$ podemos poner $F(x) = \psi(x-p) - 1$; construyendo una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V_p adaptada a ψ y escribiendo un $x \in V$ genérico como combinación lineal de los e's en V_p con coeficientes x_i's, es

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{b_i^2} - 1.$$

Esta es una ecuación normal euclídea de Q.

3.8. Sea ahora Q una cuádrica sin centros. Sea p un punto cualquiera de la cuádrica y, si $T_p = p + H$, elegimos una base $U = U' + \{u_n\}$, con U' una base de H en la que la matriz de $\phi|_H$ es como en la Proposición 1.5. Tenemos que $N_p = q + \alpha(p) \perp H$ no es nulo porque ϕ_p no lo es.

Definición. *Un vértice de* Q *es un punto* $p \in Q$ *tal que* $N_p \in \mathrm{Nu}(\alpha)$.

Lema. *El conjunto de vértices de* Q *es una variedad lineal de dimensión* $n-r-1$. *va sin prueba, por ahora*

Sea, pues, p un vértice de Q. Dado $v \in H$, es $\langle \alpha(v), N_p \rangle = \langle v, \alpha(N_p) \rangle = 0$ y entonces $\alpha(H) \subseteq H$. Consecuentemente, $\alpha|_H$ es el endomorfismo asociado a $\psi|_H$ y por lo tanto es autoadjunto respecto de la restricción del producto interno a H. Sea B_H una base ortonormal de H adaptada a $\psi|_H$; es, escribiendo en sus coordenadas,

$$\psi|_H(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{c_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{d_i^2}.$$

Sea B la base que se obtiene agregandole $N_p/\|N_p\|$ a B_H. Como $N_p \in \operatorname{Nu}\alpha$, B es también ortonormal. Escribiendo un $x \in V$ genérico con coeficientes $x_1, \ldots, x_n$ en esta base de V_p se tiene

$$\begin{aligned} F(x) &= \psi_p(x) + 2\varphi_p(x) = \psi(x-p) + 2\langle N_p, x-p\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{c_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{d_i^2} + 2x_n \langle N_p, N_p/\|N_p\|\rangle. \end{aligned}$$

Cambiando F por $G = F/\|N_p\|$ se obtiene

$$Q \ : \ G(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{c_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{d_i^2} + 2x_n,$$

lo que se denomina ecuación normal euclídea de Q.