Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2016

Práctica 6: Campos paralelos y geodésicas

1. Sean X e Y campos paralelos a lo largo de $c : I \to S$. Probar que el ángulo formado por $X(t)$ e $Y(t)$ es constante.

2. Sean $x : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ una carta y $c(t) = x(c^1(t), c^2(t))$ una curva regular contenida en la traza de x. Sea $X(t)$ un campo vectorial a lo largo de c con $X = \sum X^i x_i$. Probar que X es paralelo a lo largo de c si y sólo si

$$\frac{dX^k}{dt} + \sum \Gamma^k_{ij} X^i \frac{dc^j}{dt} = 0$$

para $k = 1, 2$.

3. Sea $\mathfrak{X}_c^{\|}$ el conjunto de campos paralelos a lo largo de una curva $c : I \to S$. Probar que $\mathfrak{X}_c^{\|}$ es un espacio vectorial real de dimensión 2.

4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie simétrica respecto de un plano π. Probar que $S \cap \pi$ es una geodésica de S.

5. Sea $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ una curva parametrizada por longitud de arco con $x > 0$. Sea S la superficie de revolución obtenida al rotar α alrededor del eje z.

(a) Probar que los meridianos de S son geodésicas.

(b) Dar una condición necesaria y suficiente para que un paralelo de S sea geodésica.

6. Sea $\alpha \subset S$ una recta recorrida a velocidad constante. Probar que α es una geodésica.

7. Sea S una superficie. Una curva contenida en S es una *línea de curvatura* si en cada punto de la curva la dirección tangente es una dirección principal. Sea α una geodésica de S con curvatura nunca nula. Probar que α es una línea de curvatura si y solo si es una curva plana.

8. Probar que si todas las geodésicas de una superficie S son curvas planas, entonces S está contenida en un plano o en una esfera.