Geometra Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2016

Práctica 5: Primera y segunda formas fundamentales y curvatura

Primera forma fundamental

1. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de las siguientes superficies paramétricas en los puntos regulares.

(*a*) Elipsoide: $\Phi(u,v) = (a\sin(u)\cos(v), b\sin(u)\sin(v), c\cos(u))$;
(*b*) Paraboloide elíptico: $\Phi(u,v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2)$;
(*c*) Paraboloide hiperbólico: $\Phi(u,v) = (au\cosh(v), bu\sinh(v), u^2)$;
(*d*) Hiperboloide: $\Phi(u,v) = (a\sinh(u)\cos(v), b\sinh(u)\sin(v), c\cosh(u))$.

2. Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera S^2 en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

3. Las curvas coordenadas de una parametrización $\Phi(u,v)$ forman una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales.

(*a*) Una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

(*b*) Si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = 1, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = 1,$$

donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

4. Probar que toda superficie de revolución puede ser reparametrizada de manera que los coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = E(v), \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

Segunda forma fundamental y curvatura de Gauss

5. Describir las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss de las siguientes superficies:

(*a*) Paraboloide de revolución: $z = x^2 + y^2$;
(*b*) Hiperboloide de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
(*c*) Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$.

6. Encontrar expresiones para la primera y segunda forma fundamental, para la curvatura de Gauss y la media, y estudiar las direcciones principales en una superficie de revolución.

7. Probar que si una superficie S es tangente a un plano P a lo largo de una curva $C \subset S$, entonces los puntos de C son puntos planares o parabólicos de S.

8. Sean S una superficie con curvatura de Gauss $K > 0$ y $C \subset S$ una curva regular. Probar que la curvatura $\kappa(p)$ de C en p satisface

$$\kappa(p) \geq \min\{|k_1|, |k_2|\}$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de S en p.

9. Sea C una curva plana contenida en el plano xy, que no corta al eje y y tal que para todo punto $p \in C$, la recta tangente en P corta al eje y a distancia 1 de P.

(a) Determinar una ecuación para C.

(b) Por rotación de C alrededor del eje y se obtiene una superficie S, llamada *pseudoesfera*. Determinar si S es una superficie regular y encontrar una parametrización en un entorno de cada punto regular. Mostrar que la curvatura de Gauss en todo tal punto es -1.

10. Probar que las únicas superficies de revolución con curvatura constante nula son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.

11. Sea S una superficie regular. La *indicatriz de Dupin* de S en un punto p es el conjunto de vectores $w \in T_pS$ tales que $II_p(w) = \pm 1$. Probar que si p es un punto elíptico la indicatriz de Dupin en p es una elipse. ¿Qué ocurre si p es umbílico?

12. Determinar los puntos umbílicos del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

13. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva contenida en el plano xz, que notamos por $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$. Sea S la superficie de revolución de α alrededor del eje z, y supongamos que S tiene curvatura Gaussiana constante k. Mostrar que entonces

$$\begin{aligned} &x'' + kx = 0, \\ &z = \int \sqrt{1 - x'^2}\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Recíprocamente, mostrar que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe una superfice de revolución con curvatura de Gauss constante igual a k. ¿Qué dimensión tiene el espacio de soluciones de la primera ecuacución diferencial?

14. Probar que todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están generadas por curvas de la forma

$$\begin{cases} x(t) = C \cos t, \\ z(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{1 - C^2 \sin^2 u}\, \mathrm{d}u \end{cases}$$

para alguna constante C. Determinar el dominio de t y haga un gráfico de la curva cortada en el plano xz cuando $C = 1$, $C > 1$ o $C < 1$. Qué superficie obtenemos cuando $C = 1$?