Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2016
Práctica 4: Superficies

Subvariedades de $\mathbb{R}^n$

1. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto y $k \in \mathbb{N}_0$. Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(i) Para cada punto $x \in M$ existen abiertos U, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $h : U \to V$ tales que $x \in U$ y

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}) = \{y \in V : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}.$$

(ii) Para todo punto $x \in M$ existen abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable inyectiva $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$x \in U, \qquad \phi(W) = M \cap U,$$
$$D\phi(y) \text{ tiene rango } k \text{ para todo } y \in W,$$
$$\phi^{-1} : \phi(W) \to W \text{ es continua.}$$

Cuando se cumplen, decimos que M es una *subvariedad de dimensión k de $\mathbb{R}^n$*. Si $x \in M$ y $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ satisfacen las condiciones de (ii), decimos que ϕ es una *parametrización regular de M alrededor de x*.

2. Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión k y $N \subseteq M$ es un abierto relativo, entonces N es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k.

3. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, sea $k \in \{0, \ldots, n\}$ y sea $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ una función diferenciable que tiene a $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ en su imagen. Si para cada $x \in f^{-1}(0)$ el rango de $f'(x)$ es $n-k$, entonces el conjunto $M = f^{-1}(0)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k.

4. (a) Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión k y $x \in M$, entonces existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $x \in U$ y una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $M \cap U = f^{-1}(0)$ y para cada $y \in M \cap U$ el rango de $f'(y)$ es $n-k$.

(b) Muestre que la conclusión de la parte anterior no es válida globalmente. Para ello, exhiba $n \geq 1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ y una subvariedad $M \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimensión k tal que no existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $M \subseteq U$, $M = f^{-1}(0)$ y f' tiene rango $n-k$ en cada punto de M.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua y sea $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in \mathbb{R}^n\}$ su gráfico. Entonces Γ_f es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimensión n si f es diferenciable.

Funciones diferenciables

6. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión k y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para cada $x \in M$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $g : U \to \mathbb{R}$ tales que $x \in U$ y $g|_{U \cap M} = f$.

(ii) Para cada $x \in M$ existe una parametrización regular $\phi : W \to M$ de M alrededor de x, la composición $f \circ \phi : W \to \mathbb{R}$ es diferenciable,

(iii) Para cada $x \in M$ y cada parametrización regular $\phi : W \to M$ de M alrededor de x, la composición $f \circ \phi : W \to \mathbb{R}$ es diferenciable, Cuando estas condiciones se cumplen, decimos que f es *diferenciable*.

7. Si $M \subseteq \mathbb{R}^m$ y $N \subseteq \mathbb{R}^n$ son subvariedades y $f : M \to N$ es una función, decimos que f es *diferenciable* si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ la composición $p_i \circ f : M \to \mathbb{R}$ de f con la proyección i-ésima $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Muestre que si $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ y $P \subseteq \mathbb{R}^p$ son subvariedades y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones diferenciables, entonces $g \circ f : M \to P$ es también diferenciable.

Espacio tangente

8. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión k y sea $x \in M$. Si $f : W \to \mathbb{R}^n$, con $W \subseteq \mathbb{R}^k$, es una parametrización regular de M alrededor de x y $w \in W$ es tal que $f(w) = x$, entonces el subespacio vectorial $T_xM = f'(w)(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{R}^n$ depende solamente de M y de x. Llamamos a T_xM el *espacio tangente a M en x*.

Para verificar esto, muestre que T_xM es el conjunto de vectores $v \in \mathbb{R}^n$ tales que existe $\varepsilon > 0$ y una función diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ con imagen en M y tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$.

9. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^m$ y $N \subseteq \mathbb{R}^n$ subvariedades y sea $f : M \to N$ es una función diferenciable. Si $x \in M$, muestre cómo construir una función lineal $f'(x) : T_xM \to T_{f(x)}M$ que merezca llamarse la *diferencial de f en x* y pruebe una *regla de la cadena* para funciones entre subvariedades.

Superficies regulares

10. Probar que el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es una superficie regular y exhibir una parametrización regular en un entorno de cada punto.

11. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ una función C^1. Probar que el gráfico de f

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}$$

es una superficie regular. ¿Cuál es el plano tangente en cada punto?

12. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regular contenida en el plano xz, $\alpha(t) = (x(t), 0, z(t))$ con $x(t) > 0$ para todo t. Si rotamos la curva α alrededor del eje z obtenemos una *superficie de revolución*. Podemos parametrizar esta superficie usando parámetros t y θ: t indica la posición en la curva y θ es el ángulo de rotación. Explícitamente, esta parametrización está dada por

$$\Phi(t, \theta) = x(t)(\cos\theta, \sin\theta, 0) + z(t)(0, 0, 1).$$

(*a*) Probar que si $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, la fórmula anterior define una parametrización regular $\Phi : (a, b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ de la superficie de revolución generada por α.

(*b*) Sean $0 < a < b$. La circunferencia $(x - b)^2 + z^2 = a^2$ en el plano xz genera una superficie de revolución que se llama *toro*. Probar que el toro es una superficie regular.

13. *Proyección estereográfica en S^2.* Sea S^2 la esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Notemos N al punto $(0, 0, 1) \in S^2$. La *proyección estereográfica* es la función $\pi_N : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ que a un punto $p \in S^2 - \{N\}$ le asigna el punto de intersección entre el plano xy y la recta que pasa por N y p. Hallar una fórmula para la función inversa $\pi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\}$ y probar que es una parametrización regular de la esfera.

14. Probar que el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ es una superficie regular y describir posibles parametrizaciones regulares.

15. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función. Dar condiciones suficientes para que la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

defina una superficie regular. ¿Cuál es el plano tangente en cada punto?

16. Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son superficies regulares y encontrar una parametrización en un entorno de cada punto regular:

(*a*) Cono: $z^2 = x^2 + y^2$;

(*b*) Paraboloide hiperbólico: $x^2 - y^2 - z = 0$;