Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2016

Práctica 2: Curvas planas

Recuerdo: Una *curva parametrizada* en el plano es un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ junto con una función $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{C}$ es la imagen de α. Decimos que $\mathcal{C}$ es diferenciable (o C^k) si tiene una parametrización diferenciable (o C^k), y que es regular si tiene una parametrización diferenciable α tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Algunas curvas con nombre propio

1. Un disco circular de radio 1 contenido en el plano xy rueda sobre el eje x sin deslizar. La figura descripta por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama *cicloide*.

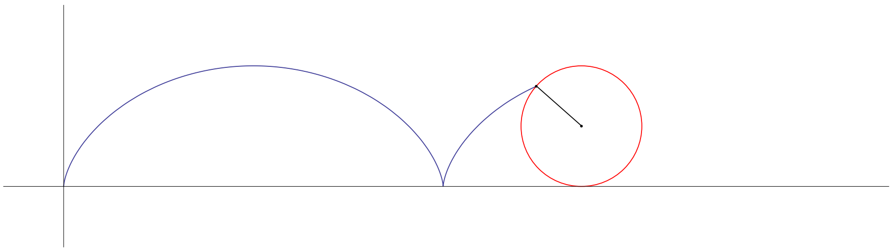

Figure 1: Cicloide

(*a*) Obtener una parametrización del cicloide y determinar sus puntos singulares.

(*b*) Calcular la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

2. Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta) + \log(\tan(\theta/2))).$$

La curva parametrizada por α es llamada *tractriz*.

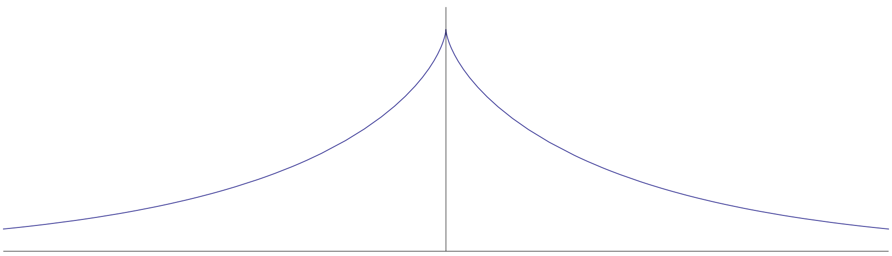

Figure 2: Tractriz (traspuesta)

(*a*) Probar que la función α es diferenciable pero no regular.

(*b*) Sea P un punto de la tractriz, L la recta tangente que pasa por P, y Q la intersección de L con el eje y. Probar que la distancia de P a Q es 1.

3. Sea $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right),$$

y sea $\mathcal{C}$ la curva que parametriza. Probar que:

(*a*) el origen pertenece a $\mathcal{C}$, y en ese punto su tangente es el eje x;

(*b*) se tiene que $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = (0,0)$ y $\lim_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0,0)$;

(*c*) la recta $x + y + a = 0$ es una asíntota de $\mathcal{C}$.

La figura que se obtiene completando la curva con su simétrica respecto de la recta $y = x$ se llama *folio de Descartes*.

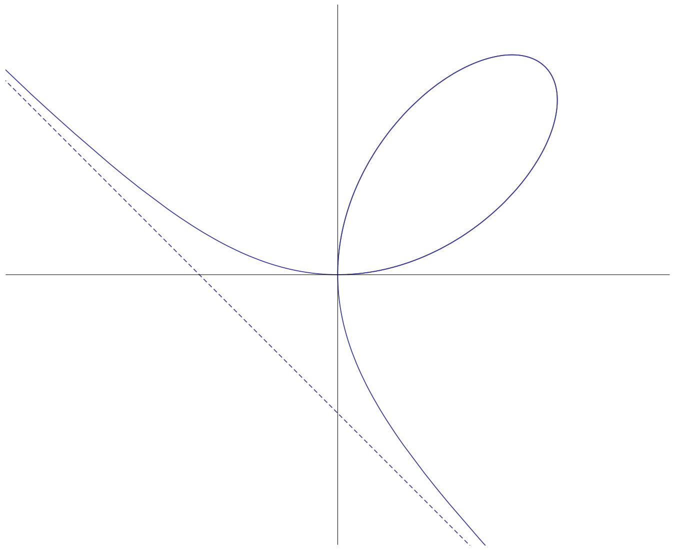

Figure 3: Folio de Descartes y su asíntota

4. Sean $b < 0 < a$, y consideremos la función $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t)).$$

La curva parametrizada por esta función se llama *espiral logarítmica*.

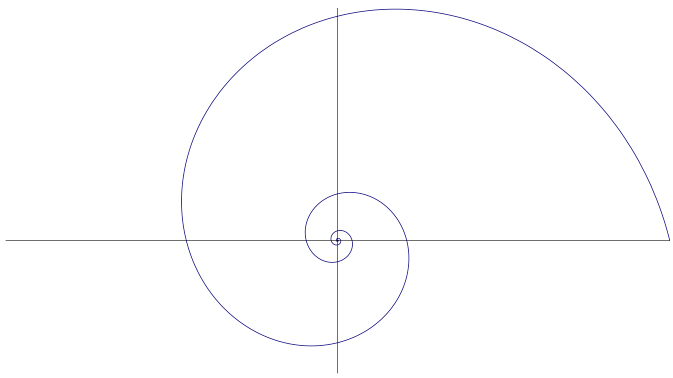

Figure 4: Espiral Logarítmica

(*a*) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = (0,0)$, y que cuando $t \to +\infty$ la curva sigue una trayectoria que envuelve al origen infinitas veces (sí, el enunciado es vago... parte del ejercicio es precisar esta noción de “envolver el origen”).

(*b*) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0,0)$ y $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t |\alpha'(\tau)|\, d\tau$ es finito. Concluir que la espiral logarítmica tiene longitud de arco finita.

5. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función

$$\alpha(t) = \left(\frac{(1+t^2)t}{1+t^4}, \frac{(1-t^2)t}{1+t^4} \right).$$

La curva parametrizada por α se llama *lemniscata*.

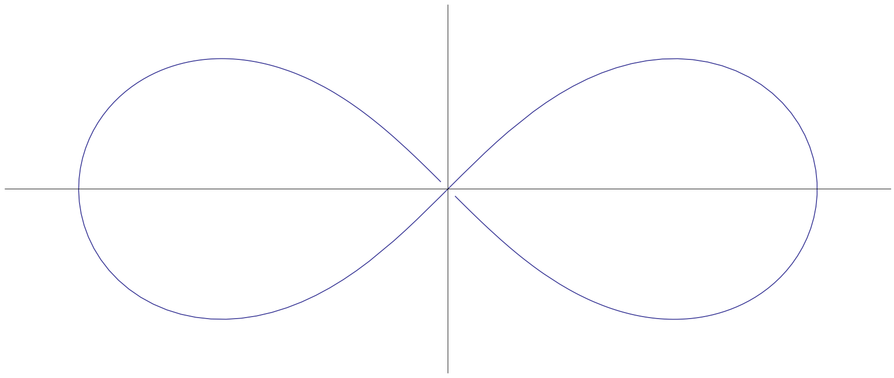

Figure 5: Lemniscata

(*a*) Probar que la función α es diferenciable, regular y simple.

(*b*) Determinar $\lim_{t\to-\infty} \alpha(t)$ y $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t)$ y concluir que α no es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y la lemniscata.

Normales, tangentes y curvaturas

Sea $\mathcal{C}$ una curva parametrizada por longitud de arco por la función α. El vector *tangente* a $\mathcal{C}$ en $P = \alpha(s)$ es $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$; el vector *normal* a $\mathcal{C}$ en P es el único vector unitario $\mathbf{n}(s)$ tal que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ forma una base ortonormal orientada de $\mathbb{R}^2$. Finalmente, la curvatura de $\mathcal{C}$ en P es igual a $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$.

Todas las curvas de aquí en adelante son parametrizables.

6. Calcular la curvatura de un círculo de radio r.

7. Sea $\mathcal{C}$ una curva que no pasa por el origen y sea P el punto de $\mathcal{C}$ más próximo al origen. Probar que la tangente a $\mathcal{C}$ en P es ortogonal al vector P.

8. Probar que si todas las normales a una curva pasan por un punto fijo entonces la curva está contenida en un círculo.

9. *Otra definición para la curvatura.* Sea $\mathcal{C}$ una curva y α una parametrización por longitud de arco.

(*a*) Probar que $\alpha''(s)$ es ortogonal a $\alpha'(s)$ para todo $s \in (a,b)$. En particular $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$ es paralelo al vector normal $\mathbf{n}(s)$.

(*b*) Sea $k(s)$ el único escalar tal que $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$. Probar que $|k(s)| = \kappa(s)$.

(*c*) Probar que $\kappa(s)$ es el área del rectángulo formado por el par de vectores $\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s)$.

(*d*) Probar que si κ es constante e igual a $1/r$ entonces $\mathcal{C}$ está contenida en una circunferencia de radio r.

10. Sea $\mathcal{C}$ una curva y sea α una parametrización cualquiera (no necesariamente por longitud de arco). Demostrar que la curvatura de $\mathcal{C}$ está dada por

$$k = \frac{\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_2'\alpha_1''}{[(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2]^{3/2}}.$$

11. Sea $k : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Fijemos $s_0 \in I$ y definamos una nueva función $\theta : I \to \mathbb{R}$ como $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ para cada $s \in I$. Probar que la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, donde

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right)$$

tiene curvatura k, y que cualquier otra curva cuya curvatura esté dada por k es congruente a $\mathcal{C}$ (es decir, se obtiene aplicando una transformación lineal ortogonal que preserva orientación y una traslación a $\mathcal{C}$).

12. Consideremos una curva dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, con $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable. Probar que la longitud de la curva es

$$\int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

y que su curvatura, como función de θ, es

$$k = \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho'^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Centros de curvatura

Sea $\mathcal{C}$ una curva cuya curvatura nunca se anula y sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud de arco. Si $s \in (a, b)$, se llama *centro de curvatura de $\mathcal{C}$ en $P = \alpha(s)$* al punto

$$x(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$$

y se llama *círculo osculador a α en s* al círculo centrado en $x(s)$ cuyo radio es $\kappa(s)^{-1}$.

13. Mostrar que la curva $\mathcal{C}$ y el círculo osculador se cortan en P, y en ese punto tienen la misma tangente y la misma curvatura.

14. Determinar los centros de curvatura y los círculos osculadores de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

15. La *evoluta* de $\mathcal{C}$, que notamos $e(\mathcal{C})$, es la curva formada por los centros de curvatura de $\mathcal{C}$; la función $x(s)$ es una parametrización de $e(\mathcal{C})$.

(*a*) Probar que la tangente a $e(\mathcal{C})$ en $Q = x(s)$ es paralela a la normal a $\mathcal{C}$ en $P = \alpha(s)$.

(*b*) Supongamos que la curvatura de $\mathcal{C}$ es monótona. Probar que la longitud de arco de $e(\mathcal{C})$ entre dos puntos Q y Q' es igual a la diferencia de los radios de curvatura en los correspondientes puntos P y P' de $\mathcal{C}$.