

A) Estimadores de Bayes.

1. Consideremos una muestra aleatoria $X_1, \dots, X_n$ tal que $X_i | \theta = \theta \sim F_\theta$ y θ tiene distribución a priori Λ . Se quiere estimar $q(\theta)$ con función de pérdida cuadrática. Probar que si $T(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente para θ , entonces el estimador de Bayes de $q(\theta)$ depende de $\mathbf{X}$ sólo a través de T .
2. (a) Sea θ con distribución a priori Λ y $X_1, \dots, X_n$ una m.a. tal que $X_i | \theta = \theta \sim F_\theta$. Se desea estimar $q(\theta)$ utilizando la función de pérdida cuadrática. Demostrar que si el estimador de Bayes $\delta_\Lambda(\mathbf{X})$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$, es decir

$$E(\delta_\Lambda(\mathbf{X}) | \theta = \theta) = q(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta,$$

$$\text{entonces } E[(\delta_\Lambda(\mathbf{X}) - q(\theta))^2] = 0.$$

- (b) Mostrar que $\bar{X}$ no es un estimador de Bayes de θ para ninguna distribución a priori Λ cuando $X | \theta = \theta \sim N(\theta, 1)$
3. Sea X una v.a. tal que $X | \theta = \theta \sim \mathcal{U}(0, \theta)$ y $\theta \sim \Gamma(2, 1)$.
 - (a) Encontrar el estimador de Bayes cuando $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$.
 - (b) Encontrar el estimador de Bayes cuando $L(\theta, d) = |\theta - d|$.

4. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. tal que $X_i | \theta = \theta \sim Bi(1, \theta)$ y $\theta \sim \Lambda$ continua. Consideremos la función de pérdida cuadrática.
 - (a) Probar que $\bar{X}$ no es un estimador de Bayes de θ .
 - (b) Hallar el estimador de Bayes δ_Λ cuando $\Lambda = \beta(r, s)$, con $r, s > 0$. Mostrar que δ_Λ es un promedio pesado entre $\bar{X}$ y $\frac{r}{r+s}$. Interpretar.

Recordar: que $\theta \sim \beta(r, s)$ si su función de densidad es $f(\theta) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \theta^{r-1} (1-\theta)^{s-1} I_{(0,1)}(\theta)$

5. Consideremos una m.a. $X_1, \dots, X_n$ tal que $X_i | \theta = \theta \sim \mathcal{P}(\theta)$ y $\theta \sim \Gamma(r, \lambda)$, con $r, \lambda > 0$.
 - (a) Encontrar el estimador Bayes δ_Λ y calcular $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$ el riesgo de Bayes.
 - (b) Mostrar que δ_Λ puede escribirse como un promedio pesado entre $\bar{X}$ y $\frac{r}{\lambda}$. Interpretar.
 - (c) Encontrar el estimador de Bayes de θ para la función de pérdida $L(\theta, d) = \frac{(\theta - d)^2}{\theta}$ y calcular $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$.

B) Estimadores minimax y admisibles.

1. Si $X_1, \dots, X_n$ es una m.a. tal que $X | \theta = \theta \sim Bi(1, \theta)$, probar que $\bar{X}$ es minimax y admisible para la función de pérdida $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / [\theta(1 - \theta)]$.
Tener en cuenta que para la función de pérdida mencionada $\bar{X}$ es el estimador de Bayes de θ cuando $\theta \sim U(0, 1)$
2. Si $X_1, \dots, X_n$ es una m.a. tal que $X | \theta = \theta \sim \mathcal{P}(\theta)$, mostrar que $\bar{X}$ es el único minimax para la función de pérdida $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / \theta$.