

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

Práctica N° 5: Aproximación por cuadrados mínimos.

Ejercicio 1 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ y un número n y devuelva un vector con los coeficientes del polinomio de grado n que mejor ajusta la tabla dada por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en el sentido de cuadrados mínimos.

Para el cálculo, utilice la descomposición QR de una matriz apropiada.

Ejercicio 2 La siguiente tabla contiene los porcentajes de asistencia a los laboratorios de Cálculo Numérico y la nota obtenida en el final de la materia, por un grupo de alumnos:

x	60.3	37.4	65	74.8	39	21.1	36.1	38.6	53.1	65.7	16.8	32.4	78.8	15.3
y	8	6	8	9	6	5	6	6	7	8	5	6	9	5
x	84.8	71.6	54.7	67.1	35	49.7	80.5	66.8	60.4	30.7	50.2			
y	10	9	7	8	6	7	10	8	8	6	7			

Realizar un ajuste lineal y un ajuste cuadrático de los datos. A partir de cada ajuste, ¿qué porcentaje de asistencia a los laboratorios sería recomendable alcanzar si se quiere obtener al menos un 8 en el final?

Ejercicio 3 Hallar la constante o polinomio de grado 0 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \dots, x_n$ en $[a, b]$.

Ejercicio 4 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, y un conjunto de funciones $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \{f_1, \dots, f_n\}$$

y calcule la función $f \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ que mejor aproxima a la tabla dada por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en el sentido de cuadrados mínimos.

Nota: Investigar la estructura de datos `cell` como una forma de dar el conjunto $\mathbf{S}$.

Ejercicio 5 Sea S el subespacio de funciones continuas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generado por las funciones del conjunto $B = \{1, x, 2^x, 3^x\}$. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sea $x_i = i$, y sea T un conjunto de datos del tipo $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$.

- Demostrar que B es una base de S y que para todo conjunto de datos T existe una única función $p \in S$ tal que p interpola a T .
- Demostrar que $\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^3 p(x_i)q(x_i)$ es un producto interno en S .
- Aproximar la siguiente tabla de datos en el sentido de cuadrados mínimos

x	0	1	2	3
y	0.3	-0.2	7.3	23.3

con funciones del tipo: (a) $y = a2^x + b3^x$, (b) $y = a2^x + b3^x + c$.

d) Graficar los resultados obtenidos junto con los valores de la tabla de datos.

Ejercicio 6 Considerar $\text{erf} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- a) Graficar la función con el comando `erf` de Octave en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{erf}(x) = \pm 1$.
- b) Aproximar la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con polinomios de grado 1, 3 y 5, considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto con estos polinomios en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que la aproximación es mala fuera del intervalo $[-10, 10]$.

- c) Se quiere aproximar nuevamente la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con una combinación lineal de funciones que compartan con erf la propiedad de ser acotada e impar. Para ello, ajustar la función erf con una función del tipo

$$c_1 x e^{-x^2} + c_2 \arctan(x) + c_3 \frac{x}{x^2 + 1},$$

considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto a esta aproximación en el intervalo $[-15, 15]$ y comparar con el ítem (b).

Ejercicio 7 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim a e^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

Ejercicio 8 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(-f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	- 1.1	- 0.4	- 0.9	- 2.7

Ejercicio 9 Considerar la función signo dada por

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aproximar la función sgn en el sentido de cuadrados mínimos con funciones de la forma $a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)$, considerando puntos equiespaciados en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con paso 0.001. Graficar el resultado obtenido.

Ejercicio 10 Considerar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f'(x)g'(x) dx$$

- a) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en S_m , el espacio generado por $\{x, x^2, x^3, \dots, x^m\}$.
- b) Hallar una base ortonormal para S_3 .
- c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos sobre S_3 para $f(x) = x^4$.

Ejercicio 11 Sea

$$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) - f(-1)g(-1) + \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx.$$

- a) Decidir si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $C^1([-1, 1])$.
- b) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1, 1]) : f \text{ es impar}\}$.
- c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^5$ sobre el subespacio S generado por $\{x, x^3\}$.

Ejercicio 12 a) Demostrar que

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f''(x)g''(x)dx + f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$$

es un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^2([-1, 1])$.

- b) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[X]$ para el producto interno definido en el ítem anterior.
- c) Probar que si f es una función par en $\mathcal{C}^2([-1, 1])$, entonces su proyección sobre $\mathbb{R}_2[X]$ es par, y que si f es una función impar, entonces su proyección es impar.

Ejercicio 13 Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y sea

$$H_n = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}),$$

el n -ésimo polinomio de Hermite. Consideramos el siguiente producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2} dt$$

- a) Probar que H_0 y H_1 son ortogonales con este producto interno.
- b) Sea S_2 el subespacio generado por $\{H_0, H_1\}$. Hallar el polinomio $H \in S_2$ que mejor aproxima a la función: $f(t) = e^{-t^2}$. (Observación: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.)