

---

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

---

## Práctica N° 4: Número de condición. Sistemas Lineales.

**Ejercicio 1** Probar que para toda  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

a)

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

b)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

**Ejercicio 2** Si  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , probar que las constantes de equivalencia entre las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  y entre las normas  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_{\infty}$  vienen dadas por:

- Vectorial

$$\begin{aligned} \|x\|_{\infty} &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 &\leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \end{aligned}$$

- Matricial

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{\infty} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1 \end{aligned}$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_{\infty}$

**Ejercicio 3** Se quiere estimar la norma 2 de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  como el máximo del valor  $\|Ax\|_2 / \|x\|_2$  entre varios vectores  $x \in \mathbb{R}^3$  no nulos generados al azar. Hacer un programa reciba una matriz  $A$  y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

$$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max \left\{ s_k, \frac{\|Ax_k\|_2}{\|x_k\|_2} \right\}$$

donde los  $x_k \in \mathbb{R}^3$  son vectores no nulos generados al azar con coordenadas en el intervalo  $[-1, 1]$ .

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

Recordar que tanto la norma de un vector como de una matriz se calculan en Octave con el comando `norm`. Tener en cuenta que los vectores generados al azar (comando `rand`) tienen coordenadas en el intervalo  $[0, 1]$ . Chequear, además que estos vectores generados resulten no nulos.

**Ejercicio 4** Se tiene el sistema  $Ax = b$ .

- a) Sea  $x$  la solución exacta y  $\tilde{x}$  la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector  $r := b - A\tilde{x}$ . Si notamos  $e = x - \tilde{x}$ , mostrar que:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

- b) En lugar del dato exacto  $b$  se conoce una aproximación  $\tilde{b}$ .  $\tilde{x}$  es tal que  $A\tilde{x} = \tilde{b}$ . Probar que:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

**Ejercicio 5** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

- a) Calcular  $\text{cond}_2(A)$  y  $\text{cond}_\infty(A)$ .
- b) ¿Cuán chico debe ser el error en los datos  $(b - \tilde{b})$ , si se desea que el error en la aproximación de la solución sea menor que  $10^{-4}$ ?
- c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar  $b = (3, 2, 2)^t$ , que se corresponde con la solución exacta  $x = (1, 1, 1)^t$ . Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el ítem anterior y perturbar  $b$  obteniendo  $\tilde{b}$ . Finalmente, resolver  $A\tilde{x} = \tilde{b}$  y verificar que  $\|\tilde{x} - x\| < 10^{-4}$ .

**Ejercicio 6** Probar que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz inversible y  $\|\cdot\|$  es una norma matricial, la condición de  $A$  verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \leq \inf \left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular} \right\}.$$

Deducir que

$$\text{cond}(A) \geq \sup \left\{ \frac{\|A\|}{\|A - B\|} : B \text{ es singular} \right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que  $\text{cond}(A)$  mide la distancia relativa de  $A$  a la matriz singular más próxima.

**Ejercicio 7** a) Estimar la  $\text{cond}_\infty(A)$  de las siguientes matrices en función  $\varepsilon$  (cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + \varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 - \varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Concluir que la condición de las matrices  $A$  y  $B$  del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

**Ejercicio 8** Sea  $D_n$  la matriz diagonal de  $n \times n$  con elementos diagonales iguales a  $1/10$ . Calcular el determinante de  $D_n$  y ver que  $\det(D_n) \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ . ¿ $D_n$  está mal condicionada?

**Ejercicio 9** Sea  $A_n \in \mathbb{R}^n$  la matriz dada por  $A_n = (a_{i,j})$ ,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que  $\text{Cond}_\infty(A_n) \geq Cn^2$  para alguna constante  $C$  independiente de  $n$ .

b) Probar que  $\text{Cond}_2(A_n) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 10** La  $n$ -ésima matriz de Hilbert  $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se define de la siguiente manera

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i + j - 1}.$$

Demostrar que  $\text{cond}_\infty(H_n) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 11** a) Escribir un programa en **Octave** que resuelva un sistema  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  usando eliminación gaussiana sin pivoteo.

b) Adaptar el programa del ítem anterior para que calcule la matriz  $A^{-1}$ .

**Ejercicio 12** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

**Ejercicio 13** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz tridiagonal.

a) Mostrar que el proceso de eliminación gaussiana preserva los ceros de  $A$ , es decir que a lo largo de la triangulación no se generan valores no nulos fuera de las tres diagonales principales.

- b) Adaptar el programa del Ejercicio 11 para que resuelva un sistema de ecuaciones  $Ax = b$ , con  $A$  tridiagonal. El programa debe recibir cuatro vectores (las tres diagonales principales y  $b$ ), y devolver  $x$ .

Utilizar los comandos `tic` y `toc` de `Octave` para conocer el tiempo que se tarda en resolver un sistema con este programa y comparar con el que se requiere para resolver el mismo sistema utilizando los comandos `inv` y `\`, que no están especialmente pensados para matrices tridiagonales.

- c) Experimentar con ejemplos de la Práctica 3 cuya formulación conduzca a matrices tridiagonales.

**Ejercicio 14** Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

**Ejercicio 15** Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calcular una descomposición en valores singulares de  $A$ .
- Dibujar el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$  y la elipse  $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$ , señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- Calcular  $\|A\|_2$  y  $Cond_2(A)$ .
- Calcular  $A^{-1}$  usando la descomposición hallada.

**Ejercicio 16** Sean

$$H_j = \begin{pmatrix} j & -j \\ j & j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad A_n = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & H_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

- Probar que  $Cond_1(A_n) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- Calcular la descomposición en valores singulares y la descomposición QR de  $A_n$ .
- Calcular  $Cond_2(A_n)$ .
- Sea  $P_n$  la matriz diagonal tal que  $(P_n)_{ii} = (A_n)_{ii}$ , ( $P_n$  es el preconditionador de Jacobi para  $A_n$ ). Probar que  $Cond_2(P_n^{-1}A_n) = 1$ . ¿Cómo podría utilizarse esta información si se quiere resolver un sistema de la forma  $A_n x = b$ ?

**Ejercicio 17** Escriba un programa en Octave que reciba como input una matriz  $A$  y un entero positivo  $r$  y:

- Calcule la descomposición en valores singulares  $A = U\Sigma V'$ , utilizando el comando `svd`.
- Corrija la matriz  $\Sigma$  poniendo  $\sigma_i = 0, \forall i > r$ .
- Devuelva  $B = U\tilde{\Sigma}V'$ , siendo  $\tilde{\Sigma}$  la matriz que resulta de corregir  $\Sigma$  según el ítem anterior.

Este programa calcula la matriz  $B$  de rango  $r$  tal que la norma  $\|A - B\|_2$  es mínima. Aplique este programa a distintas matrices, con distintos valores de  $r$ .

**Ejercicio 18** El programa del ejercicio anterior puede utilizarse para comprimir imágenes. En efecto, dada una imagen blanco y negro el comando `imread` de Octave convierte la imagen en una matriz en la que cada casillero representa un píxel y su valor corresponde al color del píxel en escala de grises. El comando `imshow` aplicado a esta matriz, muestra la imagen, mientras que el comando `imwrite` permite guardar la matriz como un archivo de imagen.

Implementar un algoritmo que reciba como input un archivo de imagen y un entero positivo  $r$ , realice la compresión como en el ejercicio anterior y guarde el resultado en otro archivo. Experimentar con el valor de  $r$ , observando cuán chico puede ser  $r$  en relación con el tamaño de la matriz si se desea conservar calidad en la imagen.

La misma experiencia puede repetirse con imágenes en color. En este caso, debe tenerse en cuenta que el comando `imread` devuelve un arreglo  $A$  de tamaño  $m \times n \times 3$ : la imagen es de  $m \times n$  píxeles y  $A(:, :, 1)$ ,  $A(:, :, 2)$ ,  $A(:, :, 3)$  son las matrices correspondientes a su descomposición  $RGB$  (red-green-blue).

(Considerar los comandos `double` y `uint8`.)

**Ejercicio 19** Sea  $v \in \mathbb{C}^n$ . Probar que la matriz  $I - vv^*$  es unitaria si y sólo si  $\|v\|_2^2 = 2$  o  $v = 0$ .

**Ejercicio 20** Dados  $x \neq y$  en  $\mathbb{C}^n$  tal que  $\|x\|_2 = \|y\|_2$  y  $\langle x, y \rangle$  es real. Probar que la matriz unitaria  $U = I - vv^*$  con  $v = \frac{\sqrt{2}}{\|x - y\|_2}(x - y)$  satisface que  $Ux = y$ .

**Ejercicio 21** Implementar un programa que calcule la descomposición  $QR$  de una matriz aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gramm-Schmidt. Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por este programa con las dadas por el comando `qr` de Octave.

**Ejercicio 22** Hallar la factorización  $QR$  de las siguientes matrices

$$a) A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}. \quad b) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 23 Método QR:** El *método QR* utiliza la descomposición  $QR$  para calcular autovalores. Consiste en, dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , generar una sucesión de matrices  $A_k$  definida del siguiente modo:

$$A_1 = A, \quad Q_k R_k \text{ descomposición QR de } A_k \text{ y } A_{k+1} = R_k Q_k.$$

- a) Probar que todas las matrices  $A_k$  tienen los mismos autovalores.
- b) Implementar un programa que genere los primeros  $m$  términos de la sucesión del ítem anterior.
- c) Aplicar el programa para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 190 & 66 & -84 & 30 \\ 66 & 303 & 42 & -36 \\ 336 & -168 & 147 & -112 \\ 30 & -36 & 28 & 291 \end{pmatrix},$$

calcular  $A_m$  con  $m = 30, 50, 100$ . Observar que los dos primeros elementos de la diagonal de  $A_m$  aproximan a los autovalores reales de  $A$  y que los autovalores de la submatriz  $A_m(3 : 4, 3 : 4)$  aproximan a los autovalores complejos de  $A$ .