ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

Práctica N° 3: Ecuaciones Diferenciales: problemas de valores de contorno.

Ejercicio 1 Hallar el error local de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función u :

- a) $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ (diferencia *forward*)
- b) $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$ (diferencia *backward*)
- c) $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ (diferencias centradas)
- d) $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

Ejercicio 2 Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicitar sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) \sim \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Ejercicio 3 Considerar el problema de evolución para la ecuación del calor, dado por la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \alpha u_{xx}(x, t) & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

- a) Plantear las ecuaciones del método de líneas para este problema, discretizando el espacio en $N + 1$ nodos equiespaciados.
- b) Escribir una función que reciba como parámetro a N y un tiempo final t_f , y resuelva el sistema con el método de líneas utilizando algún método para resolución de sistemas visto en la práctica anterior (por ejemplo, `ode45`, `ode23s`). Se puede tomar $g(x) = \sin(\pi x)$.
- c) Utilizar la función del ítem anterior para resolver el sistema con $N = 10, 50$ y 100 . ¿Qué se observa?

Ejercicio 4 Se tiene una masa sujeta a un resorte. Suponiendo que no existe rozamiento, la posición $y(t)$ de la masa a tiempo t está regida por la ecuación:

$$m\ddot{y} = -ky,$$

donde m es la masa y k la constante del resorte.

Supongamos que la masa se encuentra en movimiento y que se registra que su posición a tiempo 0 es $y(0) = 0$, mientras que a cierto tiempo t_f , es $y(t_f) = y_f$.

- a) Discretizar el intervalo $[0, t_f]$ con paso h . Utilizando la discretización usual para la derivada segunda y teniendo en cuenta las condiciones de contorno, discretizar el problema, formulándolo como un sistema lineal.
- b) Hacer un programa que reciba como input la masa m , la constante k y el paso h , construya la matriz del sistema, lo resuelva, y grafique la solución.
- c) Resolver para $t_f = 10$, con los siguientes datos:
 - $y_0 = 1, m = \frac{1}{4}, k = \frac{1}{2}$.
 - $y_0 = 1, m = 0.025, k = \frac{1}{2}$.
 - $y_0 = 1, m = \frac{1}{4}, k = 0.05$.
 - $y_0 = 1, m = 0.025, k = 0.05$.

Observar el efecto que producen las modificaciones en los distintos parámetros.

Ejercicio 5 Si al problema anterior se le agrega rozamiento y un forzante se obtiene una ecuación de la forma:

$$m\ddot{y} = -ky - by + f,$$

donde b es el coeficiente de rozamiento y $f = f(t)$ el forzante.

- a) Escribir el sistema discretizado que corresponde a utilizar la discretización usual de la derivada segunda y diferencias centradas para la derivada primera.
- b) Repetir usando diferencias forward para la derivada primera.
- c) Modificar el programa del ejercicio anterior para incorporar los nuevos términos de la ecuación utilizando diferencias centradas o forward para la derivada primera.
- d) Para $f = 0$ proponer soluciones de la forma $y(t) = Ae^{\lambda t}$. Hallar valores de λ en función de los parámetros m, k y b . Estudiar el comportamiento de la solución de acuerdo a la naturaleza de los valores de λ hallados.
- e) Resolver tomando $y_0 = 1, t_f = 10, y_f = 0$, con distintas combinaciones de los parámetros:
 - $m = 0.25, m = 0.025$.
 - $k = 0.5, k = 0.05$.
 - $b = 5 \times 10^{-3}, b = 0.05, b = 0.1$.

Analizar si los resultados obtenidos son cualitativamente consistentes con lo esperado.

Ejercicio 6 Calcular el error de truncado de las discretizaciones usadas en el ejercicio anterior, tanto para diferencias centradas como para forward. ¿Cuál parece preferible?

Ejercicio 7 Considerar el problema del calor estacionario en el intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} -\alpha u''(x) &= f(x), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

donde u representa la distribución de temperatura generada por una fuente f y $\alpha > 0$ es el coeficiente de difusividad térmica.

- a) Formular el problema de forma matricial.
- b) Estudiar el error de truncado.
- c) Resolver y graficar la solución para distintos valores de α .

Ejercicio 8 Considerar el problema de evolución para la ecuación del calor, dado por la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \alpha u_{xx}(x, t) & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

- a) Discretizar el problema obteniendo un esquema explícito con paso h en x y paso Δt en t .
- b) Calcular el error de truncado del método. ¿Existe algún valor de $r = \frac{\Delta t}{h^2}$ tal que el error de truncado sea mejor?
- c) Hallar condiciones sobre r que garanticen la estabilidad del método en norma infinito.
- d) Probar que el error de discretización $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$e_j^{n+1} = r e_{j-1}^n + (1 - 2r) e_j^n + r e_{j+1}^n + \Delta t T(x_j, t_n),$$

donde $T(x_j, t_n)$ es el error de truncado local en (x_j, t_n) .

- e) Probar que si se satisfacen las condiciones de estabilidad el método resulta convergente.

Ejercicio 9 Para el problema del ejercicio anterior:

- a) Implementar un programa que reciba como input los pasos h y Δt , el coeficiente α , el dato inicial g y un tiempo final t_f y resuelva el problema.
- b) Graficar la solución u con dominio en el plano $[0, 1] \times [0, t_f]$. ¿Qué se observa cuando se resuelve utilizando un valor de r que no satisface la condición de estabilidad?
- c) Graficar la solución en el intervalo $[0, 1]$, para cada instante de tiempo. Usando los comandos `drawnow` y `pause(\cdot)` puede obtenerse una *película* mostrando la evolución de la solución.

Ejercicio 10 Modificar el programa del Ejercicio 9 para que resuelva la ecuación

$$u_t(x, t) = \alpha u_{xx}(x, t) + f(x, t),$$

donde f es una fuente.

Resolver tomando $g(x) \equiv 0$, para alguna f . Por ejemplo, pueden tomarse:

- $f(x, t) = x(1 - x)$
- $f(x, t) = \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}(x)$

- $f(x, t) = \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}(x) \sin(t)$
- $f(x, t) = \chi_{[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]}(x)\chi_{[2i, 2i+1]}(t) + \chi_{[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]}(x)\chi_{[2i+1, 2i+2]}(t)$, tomando $i = 0, \dots, I - 1$, $t_f = 2I$.

Para las f independientes de t , comparar la solución a tiempo t_f con la obtenida al resolver el problema estacionario del Ejercicio 7.

Ejercicio 11 Considerar la ecuación $u_t = \alpha u_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogéneas y con $\alpha > 0$. Para el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\alpha(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}).$$

- Estudiar la estabilidad en norma infinito.
- Probar que el error de truncado es $O(\Delta t) + O(h^2)$.