

Pautas para el trabajo práctico

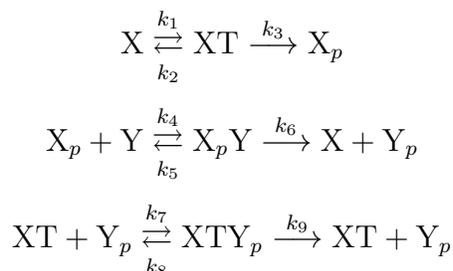
1. Formar grupos de dos o tres personas.
2. Enviar un e-mail a la dirección `ecn.octave@gmail.com` antes del lunes 7 de noviembre a las 13 horas con los datos de los integrantes del grupo (nombre y número de libreta) y con el número de enunciado elegido (que no podrá ser modificado).
3. La defensa del trabajo es presencial, en un laboratorio u otro lugar a determinar, y será entre los días 15 y 22 de noviembre, inclusive, preferentemente en horario de la práctica de la materia. No hay que entregar código impreso. Se debe enviar por e-mail a la dirección `ecn.octave@gmail.com` el conjunto de archivos del programa que se pide en el enunciado, con al menos 24 horas de anticipación a la defensa. De ser necesario, se puede mostrar en papel todo aquello que complemente o explique la resolución. Haremos preguntas a cada integrante del grupo.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

Trabajo Práctico N° 1: Curva Dosis-Respuesta.

Se tiene el siguiente sistema de reacciones químicas, que representa el sistema bacterial EnvZ-OmpR:



Se nota entre corchetes a la concentración de cada especie química, y se las ordena de la siguiente manera: $x_1 = [X]$, $x_2 = [XT]$, $x_3 = [X_p]$, $x_4 = [Y]$, $x_5 = [Y_p]$, $x_6 = [X_p Y]$, $x_7 = [XTY_p]$. Las ecuaciones del sistema bajo cinética de acción de masas son:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_6 x_6, \\ f_2 &= \frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 - k_7 x_2 x_5 + (k_8 + k_9) x_7, \\ f_3 &= \frac{dx_3}{dt} = k_3 x_2 - k_4 x_3 x_4 + k_5 x_6, \\ f_4 &= \frac{dx_4}{dt} = -k_4 x_3 x_4 + k_5 x_6 + k_9 x_7, \\ f_5 &= \frac{dx_5}{dt} = k_6 x_6 - k_7 x_2 x_5 + k_8 x_7, \\ f_6 &= \frac{dx_6}{dt} = k_4 x_3 x_4 - (k_5 + k_6) x_6, \\ f_7 &= \frac{dx_7}{dt} = k_7 x_2 x_5 - (k_8 + k_9) x_7. \end{aligned}$$

Notemos que $f_1 + f_2 + f_3 + f_6 + f_7 = 0$ y $f_4 + f_5 + f_6 + f_7 = 0$, por lo que existen constantes C_1 y C_2 tales que $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_6(t) + x_7(t) = C_1$ y $x_4(t) + x_5(t) + x_6(t) + x_7(t) = C_2$ para todo $t \geq 0$. En particular, $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_6(0) + x_7(0) = C_1$ y $x_4(0) + x_5(0) + x_6(0) + x_7(0) = C_2$.

Se desea estudiar la concentración en equilibrio de ciertas especies del sistema a medida que las cantidades (totales) C_1 y C_2 aumentan. Se proponen las siguientes constantes de reacción: $k_1 = 0,1$; $k_2 = 0,2$; $k_3 = 0,01$; $k_4 = 0,01$; $k_5 = 0,01$; $k_6 = 0,1$; $k_7 = 0,02$; $k_8 = 0,2$; $k_9 = 0,05$.

Ejercicio 1 Resolver el sistema numéricamente para distintas cantidades totales C_1 , tomando como dato inicial al vector $x_1 = C_1$, $x_5 = C_2 = 100$, $x_i = 0$ para todo $i \neq 1, 5$.

Utilizar los siguientes métodos numéricos:

1. El método multipaso Adams-Bashforth que se presenta a continuación. Los primeros términos se calculan utilizando el método de Euler visto en la Práctica 2.

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f(y_{n+2}) - 16f(y_{n+1}) + 5f(y_n)).$$

2. El comando `ode45`, o `lsode`.

En cada caso, avanzar hasta un tiempo T lo suficientemente grande como para considerar el sistema en equilibrio. Graficar superpuestos los valores en equilibrio de x_1 y x_5 contra las distintas cantidades totales de C_1 , para ambos métodos.

Ejercicio 2 Repetir el ejercicio anterior para distintas cantidades C_2 , tomando como dato inicial al vector $x_1 = C_1 = 100$, $x_5 = C_2$, $x_i = 0$ para todo $i \neq 1, 5$. Graficar superpuestos los valores en equilibrio de x_1 y x_5 contra las distintas cantidades totales de C_2 , para ambos métodos.

Notar que los valores en equilibrio de Y_p no varían, sin importar las cantidades iniciales (totales). Se puede ver que $(1 + \frac{k_8}{k_9})(f_1 + f_5 + f_7) + \frac{k_8}{k_9}f_2 = 0$ por lo que, en equilibrio, se tiene que $k_3(1 + \frac{k_8}{k_9})x_2 - k_7x_2x_5 = 0$, y si x_2 en equilibrio es positivo, entonces $x_5 = \frac{k_3(1 + \frac{k_8}{k_9})}{k_7}$. Esta constante es independiente de los valores de C_1 y C_2 . Este fenómeno se lo conoce como “robustez de concentración absoluta” en la especie Y_p y fue descrito en [1].

Referencias

- [1] G. SHINAR Y M. FEINBERG, *Structural sources of robustness in biochemical reaction networks*, Science 327(5971), (2010), pp. 1389–1391.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

Trabajo Práctico N° 2: Oscilaciones de una membrana cuadrada.

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes puede ser descrito, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas con condición de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & (x, y) \in \Omega = [-L, L] \times [-L, L] \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Los datos iniciales adecuados son, por ejemplo, la posición inicial de la membrana y su velocidad inicial.

Para resolver este problema numéricamente, se discretiza el dominio con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N)$, $0 \leq i, j \leq N$, y el tiempo $t_n = nk$ hasta un T máximo.

Considerando $u_{i,j}^n$, la aproximación de $u(x_i, y_j, t_n)$ (el valor de la función en el nodo (x_i, y_j, t_n) de la malla), se propone el siguiente esquema, que proviene de la discretización usual de la derivada segunda.

$$u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1} = \frac{c^2 k^2}{h^2} [u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}] \quad (1)$$

donde $h = 2L/N$. Por lo tanto, suponiendo conocidos la posición de la membrana a tiempo 0 y a tiempo $-k$, se puede calcular la posición para cualquier t_n posterior. La solución a tiempo cero se conoce por el dato inicial. La condición inicial en la derivada respecto del tiempo permite plantear una ecuación adicional

$$u_{i,j}^0 - u_{i,j}^{-1} = k u_t(x_i, y_j, t_0)$$

de la cual despejar el valor de $u_{i,j}^{-1}$. Reemplazando este valor en la ecuación (1), para $n = 0$, se obtiene el valor de u^1 .

Ejercicio 1 Escribir un programa que resuelva el problema de la membrana, con dato de contorno 0, posición inicial

$$u_0(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2L}(x+L)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2L}(y+L)\right) \quad (x, y) \in [-L, L] \times [-L, L],$$

velocidad inicial cero, $L = 1/2$ y $c = 1$. Comparar con la solución exacta

$$u(x, y, t) = \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}L}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{2L}(x+L)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2L}(y+L)\right).$$

Ejercicio 2 Se considera ahora una nueva condición inicial. Escribir un programa que resuelva el problema de la membrana, con dato de contorno 0, posición inicial

$$u_0(x, y) = -e^{-\alpha(x^2+y^2)} \quad (x, y) \in [-L, L] \times [-L, L],$$

velocidad inicial cero, $\alpha = 12$, $L = 5/2$ y $c = 10$. ¿Cómo varía la dinámica si $\alpha \in [1, 20]$?

Ejercicio 3 Usando los comandos `drawnow` y `pause(·)` obtener una *película* mostrando la evolución de las soluciones numéricas obtenidas en los dos ítems anteriores.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

Trabajo Práctico N° 3: Resonancia de la cuerda vibrante.

El problema de la oscilación de una cuerda fija en sus extremos, con un forzante f , puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas con condición de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \alpha u_{xx}(x, t) + f(x, t) & x \in \Omega = [0, 1], t > 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Los datos iniciales adecuados son, por ejemplo, la posición inicial de la cuerda y su velocidad inicial. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\alpha = 1$.

Resolviendo el problema con $f = 0$, por el método de separación de variables, se buscan soluciones de la forma $U(t, x) = T(t)Z(x)$; de modo que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{Z''(x)}{Z(x)} = \lambda,$$

para alguna constante λ . Usando las condiciones de contorno, tenemos que

$$Z(0) = Z(1) = 0$$

es decir que λ es un autovalor de la ecuación de Laplace con datos de contorno Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} Z'' - \lambda Z = 0 & x \in [0, 1] \\ Z(0) = Z(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Se sabe que la ecuación (2) tiene una sucesión de autovalores negativos $\{\lambda_n\}_n$ con correspondientes autofunciones $Z_n(x)$ y que $\lambda_n \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$. La correspondiente función T_n es una solución de la ecuación

$$T'' - \lambda_n T = 0$$

Si $\lambda_n = -\omega_n^2$ resulta que $T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$, y de este modo, las soluciones de (1) son de la forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) Z_n(x) \quad (3)$$

donde los valores a_n y b_n se obtienen a partir de las condiciones iniciales. A los autovalores λ_n se los llama los modos *normales de oscilación*.

Ejercicio 1 Calcular los autovalores y las autofunciones del laplaciano. Para ello, considerar una discretización del dominio $\Omega = [0, 1]$ con una malla $x_i = i/N$, $0 \leq i \leq N$.

Llamando $h = 1/N$ se obtiene el siguiente esquema, sobre la malla introducida, para aproximar la ecuación (2).

$$\frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} = \lambda z_i \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Reescribir esto como un problema lineal $Az = \lambda z$. Y resolver numéricamente. Graficar los 9 primeros autovectores (aproximaciones de las autofunciones). (Consultar la documentación de los comandos `eig`, `eigs` y `subplot`).

Finalmente, se desea resolver el problema (1), considerando datos iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x), \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad ,$$

y forzante dado por una función periódica de la forma: $\cos(\omega t)v(x)$. Cuando la frecuencia de oscilación ω se corresponde con un autovalor del laplaciano se produce el fenómeno de resonancia: como la frecuencia del forzante coincide con una frecuencia propia de la cuerda, la oscilación se hace cada vez más grande.

Discretizando la ecuación en un esquema implícito se obtiene:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{dt^2} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + f_j^n,$$

donde u_j^n es la aproximación de $u(x_j, t_n)$ y $f_j^n = f(x_j, t_n)$. La solución a tiempo cero se conoce por el dato inicial. La condición inicial en la derivada respecto del tiempo permite plantear una ecuación adicional

$$u_j^0 - u_j^{-1} = dt u_t(x_j, t_0)$$

de la cual despejar el valor de u_j^{-1} .

Ejercicio 2 Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, escribir el sistema lineal que debe resolverse en cada iteración para calcular u^{n+1} en función de u^n , u^{n-1} y f^n . Implementar un programa que resuelva el problema y grafique la evolución de la solución en función del tiempo, aprovechando los comandos `pause` y `drawnow`.

Resolver considerando $f(x, t) = \cos(\sqrt{|\lambda|}t)v(x)$, donde λ y v son un autovalor del laplaciano y su correspondiente autovector, calculados con el programa del ejercicio anterior. En principio considerar $g = 0$. Observar qué sucede, por ejemplo, cuando se toma g igual al primer autovector del laplaciano (multiplicado por 0,1) y v el tercer autovector. Resolver también con dato inicial $g(x) = 0,1x(1 - x)$.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

Trabajo Práctico N° 4: Obtención de la curva braquistocrona.

El problema de la braquistocrona fue propuesto en 1696 por Johann Bernoulli. Consiste en encontrar la curva, digamos la forma del tobogán, que une dos puntos de manera que los cuerpos que caen por ella lo hagan en el menor tiempo posible. Una primera conjetura que se podría hacer es que la braquistocrona es una recta, que es la curva más corta que une dos puntos. La solución correcta, sin embargo, es un arco de cicloide, la curva descrita por un punto en el borde de una moneda que rueda a lo largo de una regla. Concretamente es un arco que parte de uno de sus puntos picudos.

El objetivo de este trabajo práctico es realizar una aproximación numérica de la curva. Para esto, fijemos primero unas ideas del problema. Digamos que inicialmente nuestra partícula se halla en reposo en el punto $(0, 1)$ donde 1 es la altura en metros y debe llegar al punto $(L, 0)$, moviéndose sobre el vínculo $y = y(x)$ sometida únicamente a la fuerza de gravedad. Consideramos que todo rozamiento resulta despreciable.

Se sabe que una de las características de este movimiento es la conservación de la energía, por lo que se puede afirmar que

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

Donde m es la masa de la partícula, $g = 9,8 \text{ mts/seg}^2$ es la aceleración de la gravedad y $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

Luego como E es constante, en particular para $t = 0$ se tiene que $E = mg$. Observemos que además vale que

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' \dot{x}$$

Concluimos que

$$mg = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + y'^2) + mgy$$

De la ecuación de arriba podemos despejar \dot{x} llegando a que

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g(1 - y(x))}{1 + y'(x)^2}}$$

Finalmente

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(1 - y(x))}} dx$$

El tiempo que tardará nuestra partícula en recorrer toda la curva $y = y(x)$ para llegar de un extremo a otro será entonces igual a

$$F(y) = \int_0^L \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(1 - y(x))}} dx$$

Donde se asume que $F : C^2(0, L) \rightarrow \mathbb{R}$.

Para resolver este problema consideramos una discretización del intervalo $[0, L]$ dado por $x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_n = L - h, x_{n+1} = L$, para algún parámetro h . Notamos y_i a la aproximación de la curva $y(x)$ en el punto x_i . Sabemos que $y_0 = 1$ e $y_{n+1} = 0$. Las incógnitas del problema son y_1, \dots, y_n . Dada esta discretización, si asumimos que y es lineal en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)^2}{2g(1 - y(x))}} dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)^2} (2g)^{-\frac{1}{2}} (1 - y(x))^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)^2} (2g)^{-\frac{1}{2}} \frac{2h}{y_{i+1} - y_i} (\sqrt{1 - y_i} - \sqrt{1 - y_{i+1}}) \\ &= -(2/g)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^n \sqrt{\left(\frac{h}{y_{i+1} - y_i}\right)^2 + 1} (\sqrt{1 - y_i} - \sqrt{1 - y_{i+1}}) \end{aligned}$$

Ejercicio 1 Implementar una función `f_braq` que reciba un vector y de cierta longitud n y calcule el valor del funcional evaluado en y : $F(y)$.

Para resolver el problema, y estimar la braquistocrona, utilizaremos el método de Newton para minimizar F . El método de Newton está dado por:

$$y^{k+1} = y^k - H(y^k)^{-1} \nabla F(y^k),$$

donde $H(y)$ es la matriz hessiana de F evaluada en y .

Ejercicio 2 Implementar un programa que reciba como input una función f y un punto z y calcule el vector gradiente de f evaluado en z , y un programa que calcule el hessiano de f evaluado en z . Ambos utilizando diferencias forward.

Ejercicio 3 Finalmente, implementar un programa que aplique el método de Newton al funcional F con dato inicial dado por la recta que une los puntos $(0, 1)$ y $(L, 0)$. Resolver para $L = \pi/2$. Utilizando los comandos `pause` y `drawnow`, graficar la solución para cada iteración de Newton. Comparar con la solución exacta, que viene dada por: $x = (\theta - \sin(\theta))/2$, $y = 1 - (1 - \cos(\theta))/2$; para $\theta \in [0, \pi]$.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

Trabajo Práctico N° 5: Ajuste de formas geométricas.

En muchas aplicaciones es necesario resumir un conjunto de datos con una primitiva geométrica. Consideremos, por ejemplo, el caso de un círculo. Imaginemos la siguiente situación. Un robot provisto de un palpador puede obtener una serie de puntos sobre una circunferencia de eje cilíndrico, que puede estar afectado por desgaste o mala alineación. Se desea entonces calcular el radio y la posición del centro de su base a los datos medidos.

Una idea simple es la siguiente. Un círculo de centro (x_0, y_0) y radio r está descripto por la ecuación $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Desarrollando: $x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = r^2 \Leftrightarrow 2xx_0 + 2yy_0 + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) = x^2 + y^2$.

Si disponemos de N datos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, esperaríamos encontrar valores x_0, y_0 y r tales que se cumplen las N ecuaciones

$$2x_i x_0 + 2y_i y_0 + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) = x_i^2 + y_i^2.$$

Este problema no tiene solución, pero podemos pensarlo en el sentido de cuadrados mínimos: Hallar A, B, C tales que $x_i A + y_i B + C = x_i^2 + y_i^2$, $i = 1, \dots, N$ (en el sentido de que $\sum_{i=1}^N (x_i A + y_i B + C - (x_i^2 + y_i^2))^2$ sea mínima). Este problema siempre tiene solución, y luego podemos interpretar: $A = 2x_0$ ($\Rightarrow x_0 = A/2$), $B = 2y_0$ ($\Rightarrow y_0 = B/2$), $C = r^2 + x_0^2 + y_0^2$ ($\Rightarrow r = \sqrt{C - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4}}$).

Ejercicio 1 Implementar esta idea en Octave, de modo que acepte una matriz de N pares (x_i, y_i) y devuelva los parámetros de la circunferencia.

Ejercicio 2 Chequear el programa anterior con datos generados según:

- círculos completos, sin ruido
- círculos completos, con ruido aleatorio
- un arco de circunferencia de amplitud $0 < \alpha \leq 2\pi$. ¿Qué pasa para α chico (del orden de $\pi/4$, por ejemplo)?

El abordaje anterior es lo que se llama “ajuste algebraico”. Son los cuadrados de los residuos de la representación algebraica de la figura geométrica los que se minimizan, y no la distancia cuadrática a la curva.

Ejercicio 3 Para implementar un “ajuste geométrico”, se desea minimizar

$$\varepsilon_g(x_0, y_0, r) = \sum_{i=1}^N d_i^2(x_0, y_0, r),$$

donde $d_i(x_0, y_0, r)$ es la distancia del punto (x_i, y_i) al círculo de parámetros x_0, y_0, r .

- a) Para resolver el problema, y estimar los valores x_0, y_0, r , utilizaremos el método de Newton para minimizar ε_g . El método de Newton está dado por:

$$v^{k+1} = v^k - H(v^k)^{-1} \nabla \varepsilon_g(v^k),$$

donde $H(v)$ es la matriz hessiana de ε_g evaluada en v . Se puede tomar como valor inicial, por ejemplo $v^0 = [v_1^0, v_2^0, v_3^0]'$, donde (v_1^0, v_2^0) es el punto promedio de los datos, y v_3^0 es el promedio de las distancias a ese centro.

Implementar un programa que reciba como input una función f y un punto z y calcule el vector gradiente de f evaluado en z , y un programa que calcule el hessiano de f evaluado en z . Ambos utilizando diferencias forward.

- b) Chequear el comportamiento del ajuste geométrico, con los valores de x_0, y_0 y r por el método de Newton, sobre datos similares a los anteriores.

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2016

Trabajo Práctico N° 6: Reducción del ancho de banda de matrices ralas.

Una matriz rala es una donde hay muchos ceros. Ejemplos típicos provienen de la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en varias dimensiones, de la representación de grafos, etc.

Cuando se debe resolver un sistema $Ax = b$, con A una matriz rala, las técnicas de eliminación directa (eliminación gaussiana, descomposición LU, etc.) tienen el problema de que la matriz se llena de elementos no nulos. Y esto puede tornar el problema intratable.

Una posible solución consiste en reordenar filas (lo que no cambia la solución) y/o reordenar las columnas (lo que sólo introduce permutaciones en las componentes de la solución). Este procedimiento mantiene la cantidad de ceros.

Si se lograra, por ejemplo, que todos los elementos por debajo de una cierta “envolvente” $i_m(j)$, donde j es el índice de la columna e $i_m(j)$ es el mayor índice de fila para el cual hay un elemento no nulo en la columna j , claramente no es necesario seguir triangulando hacia abajo dicha columna, y eso acota las posibilidades de llenado.

Ejercicio 1 Fabricar matrices ralas con el comando `sprand`. Calcular las descomposiciones LU de las matrices. Utilizar el comando `spy` para ver la estructura de las matrices y de sus descomposiciones. Estudiar los comandos `sparse` y `full`.

Ejercicio 2 Pensar reordenamientos de filas que achiquen la envolvente, y verificar cómo se ve la matriz reordenada. Verificar también cómo quedan sus descomposiciones LU.

Ejercicio 3 Para Matlab: investigar y utilizar los comandos `colamd`, `amd`, `symamd`, `colperm`, `symrcm`. Ver, utilizando el comando `spy`, cómo quedan los ejemplos y calcular las descomposiciones LU de las matrices reordenadas. Comparar.