Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Primer Parcial

Segundo cuatrimestre de 2016 (4/10/2016)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Se tiene una máquina que utiliza el método de redondeo en base 10 y mantisa de 2 dígitos.

   a) ¿Cuál es el flotante de la suma $1+1/2+1/4+1/8+1/16$ (sumando en este orden)? Sabiendo que el valor exacto es 1,9375, ¿cuál es el error relativo? ¿De qué otra forma se podría calcular esta suma para que el error sea menor? ¿Cómo da el nuevo error relativo?

   b) [modificado] Dados $r_1 = 0{,}994$, $r_2 = 0{,}988036$ y $r_3 = 0{,}982107784$. Como $r_2 = r_1^2$ y $r_3 = r_1^3$, se propone calcular la suma $1+r_1+r_1^2$ por medio de la expresión $(1-r_3)/(1-r_1)$. Sabiendo que $1 + r_1 + r_1^2 = 2{,}982036$, ¿cuál es el error relativo?

2. Considerar el problema: $\begin{cases} y'(t) &= t(\cos(y(t)))^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$.

   a) Escribir la iteración del método de Euler correspondiente a este problema.

   b) Calcular el error de truncado local para $t \in [0, 1]$.

   c) Si se escribe a la iteración del método de Euler como $y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h)$ para $0 \leq i \leq N-1$, mostrar que $\phi(t, y, h)$ es Lipschitz respecto de la segunda variable y concluir que $|y_N - y(1)| \to 0$ cuando $N \to +\infty$.

3. Se tiene el siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} u''(x) - u'(x) &= 2x - 7 \quad \text{para } x \in (0,1), \\ u(0) &= 1, \\ u(1) &= 5. \end{cases}$$

   a) Proponer un esquema discreto para resolver el problema usando diferencias finitas.

   b) Estimar el error de truncado local del esquema propuesto.

   c) Escribir el esquema como un sistema lineal de la forma $Au = b$, indicando quiénes son la matriz A y el vector b, y sus respectivas dimensiones.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n^2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & n^{-2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & n & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrar que $\text{cond}_1(A) \geq n^4$ si $n \geq 4$. Concluir que $\text{cond}_1(A) \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$.

5. a) Sean $M \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $O \in \mathbb{R}^{nxn}$ una matriz ortogonal (es decir, $O^tO = OO^t = I_n$), y llamemos $B = OM$ y $C = MO$. Probar que M^tM tiene los mismos autovalores que B^tB y que C^tC. Concluir que si M es inversible, $\text{cond}_2(M) = \text{cond}_2(OM)$.

   b) Sean A, Q y R las matrices:

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}+2\sqrt{2} & -3 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3}-2\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

   donde $A = QR$ es la descomposición QR de la matriz A, calcular $\text{cond}_2(A)$.