

## Ecuaciones Diferenciales – 2º cuatrimestre 2016

### TRANSFORMADA DE FOURIER

**Ejercicio 1.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y sean  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha x}$ , entonces  $\hat{g}(y) = \hat{f}(y - \alpha)$ .
2. Si  $g(x) = f(x - \alpha)$ , entonces  $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)e^{-2\pi i\alpha y}$ .
3. Si  $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ , entonces  $\hat{g}(y) = \lambda^n \hat{f}(\lambda y)$ .
4. Si  $g(x) = -2\pi i x_k f(x)$  y  $g \in L^1$ , entonces  $\hat{f}$  es derivable respecto a  $y_k$  y  $\partial_{y_k} \hat{f} = \hat{g}$ .

**Ejercicio 2.** Mostrar que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

**Ejercicio 3.** Probar que si  $f \in \mathcal{S}$ , entonces  $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = f(-x)$ . Concluir que si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  es tal que  $\hat{f} = \lambda f$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$  entonces  $\lambda$  es una raíz cuarta de la unidad.

**Ejercicio 4.** Probar que la transformada de Fourier de una función  $f$  será una función real si y sólo si  $f$  es par.

**Ejercicio 5.** Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

$$\mathbf{1}_{[-1,1]}, \quad \exp(-a|x|), \quad \frac{1}{(1+x^2)}, \quad \exp(-\pi x^2).$$

**Ejercicio 6.** Sea  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $L^1$ . Se definen

1. La Transformada-coseno de Fourier como

$$\mathcal{F}_c[f](y) = \int_0^\infty f(x) \cos(xy) dx.$$

2. La Transformada-seno de Fourier como

$$\mathcal{F}_s[f](y) = \int_0^\infty f(x) \sin(xy) dx.$$

Mostrar que si se extiende  $f$  como una función par a toda la recta, tenemos

$$\mathcal{F}_c[f](y) = \pi \mathcal{F}[f](y),$$

y que si se extiende a  $f$  como una función impar, se tiene

$$\mathcal{F}_s[f](y) = \frac{\pi}{i} \mathcal{F}[f](y).$$

**Ejercicio 7.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz no singular. ¿Cómo se relacionan la transformada de Fourier de  $f(Ax)$  con la de  $f(x)$ ? ( $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ). Usar este resultado para mostrar que la transformada de Fourier transforma funciones radiales en funciones radiales.

**Ejercicio 8.** Probar que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  es de soporte compacto, entonces  $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Ejercicio 9.** Probar que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  es tal que  $\hat{f} = 0$  entonces  $f = 0$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $f \in \mathcal{S}$ . Probar que  $f * f = f$  si y sólo si  $f = 0$  a.e. ¿Qué sucede si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ?

**Ejercicio 11.** 1. Probar que si  $\phi$ ,  $\phi'$  y  $\phi''$  pertenecen al conjunto

$$L^1(\mathbb{R}) \cap \left\{ g \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0 \right\}$$

entonces existe  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $\mathcal{F}[f] = \phi$ .

2. Sea  $K \subset \mathbb{R}$  compacto y  $U \subset \mathbb{R}$  abierto tal que  $K \subset U$ . Probar que existe  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $\mathcal{F}[f](y) = 1$  para todo  $y \in K$  y  $\mathcal{F}[f](y) = 0$  para todo  $y \in \mathbb{R} - U$ .
3. Probar que  $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R})]$  es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito. (Sug.: Stone-Weierstrass)

**Ejercicio 12.** Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2 = \{y > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

**Ejercicio 13.** Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

donde  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Ejercicio 14.** Idem el ejercicio anterior para la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde  $u$  y  $g$  son funciones a valores complejos y  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Ejercicio 15.** Obtener la expresión integral de la solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde  $f, g \in \mathcal{S}$ .